11 класс

(время выполнения – 3,5 часа, максимальное число баллов - 50)

Задача 1. (10 баллов) Маленький шарик, брошенный под углом $\alpha = 15^{\circ}$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с, упруго ударяется о вертикальную стену, находящуюся на расстоянии $L = 4$ м от места броска. Плоскость стены перпендикулярна плоскости траектории шарика. 1) Найдите расстояние (по горизонтали) от места броска, на котором шарик поднимется на максимальную высоту. 2) На каком расстоянии от места броска шарик упадет на горизонтальную поверхность земли?

Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2 . Известно, что при любых углах α справедливо $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Решение.

1) $L_0 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \dfrac{10^2 \sin\left(2\cdot 15^{\circ}\right)}{20} = 2{,}5$ м.

2) Шарик коснется земли на расстоянии $l = L - l_0$, где l_0 – расстояние от стенки, на которое отлетел шарик после упругого удара со стенкой.

$$l_0 = L_1 - L,$$

где L_1 – расстояние на которое улетел бы шарик, если бы стенки не было:

$$L_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

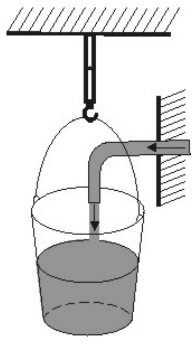
Следовательно

$$l = 2L - L_0 = 2L - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 3 \text{ м}.$$

Примерные критерии оценивания:

1. Найдена максимальная дальность полета и отмечено, что максимальная высота достигается до удара о стенку - 2 балла.
2. Получено выражение для расстояния то точки максимума – 2 балла.
3. Получен числовой ответ на первый вопрос – 2 балла.
4. Получено выражение для искомого расстояния во втором вопросе – 2 балла.
5. Получен числовой ответ на второй вопрос – 2 балла.

Задача 2. (10 баллов) Ведро объемом $V = 10$ л и массой $m = 0{,}5$ кг наполняется вертикальной струей воды из мощной колонки за $T = 5$ с. Площадь поперечного сечения струи $S = 4$ см^2. При очередном наполнении одно из креплений ручки, за которую ведро было подвешено к колонке, подломилось. К этому моменту ведро наполнилось наполовину. При какой нагрузке F на крепление оно сломалось? Струя воды из колонки вертикальна, а конец крана находится близко к ведру. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.



Решение. Непосредственно перед тем, как одно из креплений ручки сломалось, на них действовала суммарная реакция опоры, равная весу самого ведра, весу воды объемом $V/2$ и силы F_0, тормозящей струю воды в ведре:

$$2F = mg + \rho \frac{V}{2} g + F_0.$$

Силу F_0 определим, рассмотрев процесс наполнения ведра целиком. Из условия, что ведро объемом V наполняется струей с площадью поперечного сечения S за время T, находим скорость v истечения струи:

$$V = SvT,$$

откуда

$$v = \frac{V}{ST}.$$

Из закона изменения импульса $\Delta p = F\Delta t$ в виде

$$\rho V v = F_0 T$$

находим

$$F_0 = \frac{\rho V v}{T} = \frac{\rho V^2}{ST^2}.$$

Таким образом,

$$F = \frac{mg}{2} + \frac{\rho V g}{4} + \frac{\rho V^2}{2ST^2} = 2{,}5 + 25 + 5 = 32{,}5 \text{ Н}.$$

Примерные критерии оценивания:

1. Представлено значение силы F в виде трех слагаемых – 3 балла.
2. Определена скорость истечения воды из крана – 1 балл.
3. Применен закон изменения импульса – 2 балла.
4. Определена сила F_0 – 2 балла.
5. Дано окончательное выражение для F - 1 балл.
6. Определено числовое значение F - 1 балл.

Задача 3. (10 баллов) В закрытой камере находятся взвесь мельчайших капелле воды массой $m_1 = 1$ мг и водяной газ (пар) массой $m_2 = 100$ мг. На сколько процентов возрастет давление пара в камере к тому моменту, когда в результате испарения радиус r капелек уменьшится на 4%? Считайте, что температура в камере поддерживается постоянной, а диаметр всех капелек одинаков.

Решение. Пусть начальное давление пара в камере

$$p = \frac{m_2}{V}\frac{RT}{\mu}.$$

При испарении воды массой Δm с поверхности капель давление в камере возрастет на

$$\Delta p = \frac{\Delta m}{V}\frac{RT}{\mu}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta m}{m_2}.$$

Масса воды, содержащейся в виде капель, как функция радиуса r равна:

$$m_1(r) = N\rho\alpha r^3,$$

где N - число капель, ρ - плотность воды, а α - некоторый коэффициент.

Масса капель после испарения

$$m_1(r - \Delta r) = N\rho\alpha(r - \Delta r)^3 \approx N\rho\alpha\left(r^3 - 3r^2\Delta r\right).$$

Масса испарившейся воды равна

$$\Delta m = 3N\rho\alpha r^2\Delta r.$$

Тогда

$$\frac{\Delta m}{m_1} = \frac{3\Delta r}{r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta m}{m_2} = \frac{\Delta m}{m_1}\frac{m_1}{m_2} = \frac{3\Delta r}{r}\frac{m_1}{m_2} = 0{,}12\%.$$

Примерные критерии оценивания:

1. Записано выражение для начального давления в камере – 2 балла.
2. Получено выражение для приращения давления через массу испарившейся воды – 1 балл.
3. Определена масса воды до и после испарения – 2 балла.
4. Определена масса испарившейся воды – 2 балла.
5. Приведена конечная формула и дан числовой ответ – 3 балла.

Задача 4. (10 баллов) В процессе исследования электросхемы лунохода проводились стресс тесты на длительную эксплуатацию. К неидеальной аккумуляторной батарее лунохода было параллельно подключено два дублирующихся (одинаковых) прибора. Амперметр, стоящий перед батареей первоначально показал, что сила тока через батарею, при включении любого прибора была расчетной, но через продолжительное время при включении одного из приборов изменилась до 18% от расчетной, а при переключении на второй осталась исходной. При включении одновременно двух приборов сила тока стала превышать расчетную (для одного прибора) на 14.9% . Инженерами было предположено, что такое изменение силы тока возможно из-за возникновения паразитного сопротивления в контактах одного из приборов. Оцените величину этого паразитного сопротивления, если сопротивление прибора $R = 10$ Ом.

Решение.

Запишем расчетную силу тока при включении исправного прибора:

$$I_0 = \frac{U}{R + r},$$

где r - сопротивление аккумуляторной батареи.

Запишем силу тока при включении неисправной цепи:

$$I_1 = \frac{U}{R + R_{пр} + r}.$$

где $R_{пр}$ - паразитное сопротивление неисправного прибора.

Очевидно, что дубли1/0,рующие приборы подключены параллельно. Запишем силу тока при включении сразу двух приборов:

$$I_2 = \frac{U}{\frac{\left(R + R_{пр}\right)R}{2R + R_{пр}} + r}.$$

Преобразуем эти уравнения следующим образом:

$$\frac{U}{I_0} = R + r,$$

$$\frac{U}{I_1} = R + R_{пр} + r,$$

$$\frac{U}{I_2} = \frac{\left(R + R_{пр}\right)R}{2R + R_{пр}} + r,$$

и вычтем из второго и третьего уравнений первое для того, чтобы избавиться от внутреннего сопротивления r:

$$\begin{cases} \dfrac{U}{I_2} - \dfrac{U}{I_0} = \dfrac{R\left(R + R_{пр}\right)}{2R + R_{пр}} - R \\ \dfrac{U}{I_1} - \dfrac{U}{I_0} = R_{пр} \end{cases}.$$

Согласно условию, $I_2 = 1{,}149 I_0$, а $I_1 = 0{,}18 I_0$.

Разделив первое уравнение на второе

$$\frac{\dfrac{1}{I_2} - \dfrac{1}{I_0}}{\dfrac{1}{I_1} - \dfrac{1}{I_0}} = \frac{-R^2}{R_{пр}\left(2R + R_{пр}\right)}$$

и подставим значения I_2 и I_1, выраженные через I_0:

$$\frac{-R^2}{R_{пр}\left(2R + R_{пр}\right)} \approx \frac{-0{,}13}{4{,}56} \approx -0{,}029 = a.$$

Таким образом, получим квадратное уравнение на искомую величину:

$$aR_{пр}^2 + 2aRR_{пр} + R^2 = 0.$$

Решением этого уравнения

$$R_{пр} = -R + R\sqrt{1 - \frac{1}{a}} = -10 + 10\sqrt{1 + \frac{1}{0.029}} \approx 50 \text{ Ом}.$$

Отрицательный корень отброшен, как не имеющий физического смысла.

Примерные критерии оценивания:

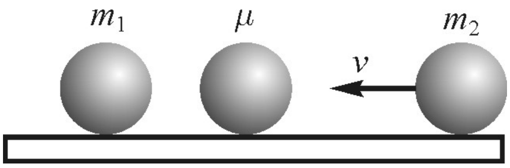
1. Правильно записаны законы Ома для токов – по 2 балла за каждое уравнение.

2. Получено квадратное уравнение – 2 балла.

3. Получено решение для искомого сопротивления – 1 балл.

4. Получен правильный ответ – 1 балл.

Задача 5. (10 баллов) Имеются три шара с массами $m_1 = 1$ кг, μ и $m_2 = 2$ кг. Шар массой m_2 движется по горизонтальной плоскости, остальные шары покоятся. Происходят центральные упругие столкновения шаров. При каком значении массы μ шар массой m_1 будет иметь после одного столкновения с шаром μ максимальную скорость? Трения между шарами и плоскостью нет.



Решение. Запишем законы сохранения импульса и кинетической энергии для первого столкновения:

$$\begin{cases} m_2 v = \mu v_1 + m_2 v' \\ m_2 v^2 = \mu v_1^2 + m_2 v'^2 \end{cases},$$

где v_1 - скорость после первого столкновения шара массой μ, v' - скорость шара массой m_2.

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{cases} m_2 \left(v - v'\right) = \mu v_1 \\ m_2 \left(v^2 - v'^2\right) = \mu v_1^2 \end{cases}.$$

Во втором уравнении левая скобка представляет собой разность квадратов, которую можно расписать:

$$\begin{cases} m_2 \left(v - v'\right) = \mu v_1 \\ m_2 \left(v - v'\right)\left(v + v'\right) = \mu v_1^2 \end{cases}.$$

Разделив второе уравнение системы на первое, получим

$v + v' = v_1$,

откуда скорость правого шара после удара равна

$$v' = v_1 - v.$$

Подставим это уравнение в закон сохранения импульса и найдем скорость среднего шара:

$$v_1 = \frac{2v}{1 + \dfrac{\mu}{m_2}}.$$

Из этой формулы легко найти скорость v_2 левого шара, заменив $v_1 \to v_2$, $v \to v_1$, $\mu \to m_1$, $m_2 \to \mu$:

$$v_2 = \frac{4v}{\left(1+\frac{\mu}{m_2}\right)\left(1+\frac{m_1}{\mu}\right)}.$$

Очевидно, что v_2 будет максимально, если минимален знаменатель.

$$\left(1+\frac{\mu}{m_2}\right)\left(1+\frac{m_1}{\mu}\right) = 1+\frac{\mu}{m_2}+\frac{m_1}{\mu}+\frac{m_1}{m_2}.$$

Условие минимума соответствует равенству нулю первой производной по μ от этого выражения:

$$\frac{1}{m_2}-\frac{m_1}{\mu^2}=0,$$

откуда получаем

$$\mu = \sqrt{m_1 m_2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4 \text{ кг}.$$

Примерные критерии оценивания:

1. Записан закон сохранения импульса для первого столкновения – 1 балл.
2. Записан закон сохранения энергии для первого столкновения – 1 балл.
3. Найдена скорость среднего шара после столкновения – 2 балл.
4. Найдена скорость левого шара после столкновения – 1 балл.
5. Определено условие максимума скорости – 1 балла.
6. Указано, как найти минимум знаменателя – 2 балла.
7. Получено выражение для минимума – 1 балл.
8. Найдена искомая масса – 1 балл.