9 класс

1. (10 баллов) Движущаяся прямолинейно с постоянным ускорением частица проходит за промежуток времени $0 \le t \le t_1$ путь S_1, а за промежуток $0 \le t \le 2t_1$ путь $2S_1$. Какой путь пройдет частица к моменту времени $3t_1$? Чему будет равна скорость частицы в момент $3t_1$?

Ответ: Частица пройдет путь $5S_1$. Скорость частицы будет равна $\frac{4S_1}{t_1}$.

Решение: Ясно, что вектор ускорения частицы направлен против вектора начальной скорости, в момент t_1 частица останавливается и в течение интервала $t_1 \le t \le 2t_1$ возвращается в исходную точку. Только в этом случае будут одинаковы пути, пройденные за $0 \le t \le t_1$ и $t_1 \le t \le 2t_1$. Путь, пройденный за интервал $2t_1 \le t \le 3t_1$ будет в 3 раза больше пути, пройденного за интервал $t_1 \le t \le 2t_1$, т.е. будет равен $3S_1$, а полный путь, пройденный с момента начала движения, будет равен $5S_1$. Путь $4S_1$, пройденный в течение интервала $t_1 \le t \le 3t_1$ можно записать как $4S_1 = \frac{a(2t_1)^2}{2}$, где a – ускорение частицы. Скорость V в момент $3t_1$ определяется формулой $V = a2t_1$. Из записанных соотношений находим

$$V = \frac{4S_1}{t_1}.$$

Разбалловка: Понята картина движения частицы – 2 балла.
Найден путь за время $3t_1$ – 4 балла.
Найдена скорость в момент $3t_1$ – 4 балла.

2. (10 баллов) Брошенное вертикально вверх тело находилось в полете 4 с и за последнюю секунду прошло путь, который втрое больше пути, пройденного за первую секунду. Во сколько раз время падения от высшей точки до земли больше времени подъема от начальной высоты до верхней точки?

Ответ: В 2,2 раза.

Решение: Обозначим через t_1 время подъема тела от начальной высоты до верхней точки, а через t_2 время падения от высшей точки до земли. По условию задачи $t_1 + t_2 = 4$ с. Путь, пройденный за первую секунду, можно записать как

$$\frac{gt_1^2}{2} - \frac{g(t_1-1)^2}{2},$$

где g – ускорение свободного падения. Здесь учтено, что $t_1 > 1$ с (иначе, очевидно, не может быть выполнено условие задачи), и путь от начальной высоты до высшей точки записан как путь падения с верхней точки до начальной высоты в силу обратимости движения. Путь, пройденный за последнюю секунду движения, можно записать как разницу путей падения от высшей точки до земли ($gt_2^2/2$) и пройденного за время t_2 -1 с:

$$\frac{gt_2^2}{2} - \frac{g(t_2-1)^2}{2} = gt_2 - \frac{g}{2}.$$

Записывая условие

$$gt_2 - \frac{g}{2} = 3\left[\frac{gt_1^2}{2} - \frac{g(t_1-1)^2}{2}\right]$$

и подставляя в него $t_2 = 4 - t_1$, получаем

$$t_1 = \frac{5}{4}.$$

Тогда

$$t_2 = 4 - t_1 = \frac{11}{4},$$

а искомое отношение равно

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{11}{5} = 2{,}2.$$

Разбалловка: Понято, что время подъема больше 1 с – 1 балл.
Записана формула для пути, пройденного за первую секунду – 2 балла.
Записана формула для пути, пройденного за последнюю секунду – 2 балла.
Найдено время подъема – 2 балла.
Найдено время падения – 2 балла.
Получен правильный ответ – 1 балл.

3. (10 баллов) Пять тел, удельные теплоемкости которых одинаковы и массы которых относятся как 1:2:3:4:5, имеют температуры, равные соответственно $5t_0$, $5t_0/2$, $5t_0/3$, $5t_0/4$, t_0. Какая установится температура, если тела привести в тепловой контакт?

Ответ: Установившаяся температура равна $\frac{5}{3}t_0$.

Решение: Поскольку заранее точно не известно, какие именно тела отдают тепло, а какие получают, то уравнение теплового баланса запишем в виде

$$Cm(5t_0 - \Theta) + 2Cm\left(\frac{5t_0}{2} - \Theta\right) + 3Cm\left(\frac{5t_0}{3} - \Theta\right) + 4Cm\left(\frac{5t_0}{4} - \Theta\right) + 5Cm(t_0 - \Theta) = 0,$$

где C – удельная теплоемкость, m – масса самого легкого из тел, Θ – конечная температура тел. Из записанного уравнения находим, что

$$\Theta = \frac{5}{3}t_0.$$

Разбалловка: Записано уравнение теплового баланса – 5 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

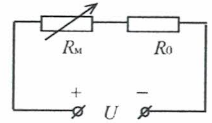
4. (10 баллов) Тонкостенный шар плавает в воде, погрузившись до половины. Через образовавшуюся течь в шар начинает поступать вода. Разница уровней воды снаружи и внутри шара сначала уменьшается, а затем растет. Считая объем шара равным V, найти объем воды, поступившей в шар к моменту, когда разница уровней воды снаружи и внутри шара становится минимальной.

Ответ: Объем поступившей в шар воды равен $V/4$.

Решение: Вес поступающей в шар воды компенсируется возрастанием силы Архимеда за счет большего погружения шара. Толщина слоя воды в шаре растет быстрее со временем, чем глубина погружения шара, пока площадь зеркала воды внутри шара меньше площади сечения шара на уровне воды снаружи. При этом разница уровней воды снаружи и внутри уменьшается (в самом начале она была равна радиусу шара). После того, как площадь зеркала воды внутри шара сравняется с площадью сечения шара на уровне воды снаружи, разница уровней начнет возрастать. Данное условие выполнится, очевидно, в тот момент, когда объем воды внутри шара станет равным четверти объема шара.

Разбалловка: Понято, что вытесняемый шаром объем воды
возрастает на объем поступившей внутрь шара воды – 3 балла.
Понято, что минимальная разница уровней воды достигается в момент
равенства площадей зеркала воды внутри и сечения шара на уровне воды снаружи – 4 балла.
Найден искомый объем – 3 балла.

5. (10 баллов) Цепь, составленная из резистора с сопротивлением $R_0 = 55$ Ом и магазина сопротивлений, который может принимать дискретные (с шагом 10 Ом) значения $R_м = 10, 20, 30 \dots 100$ Ом, подключена к источнику с напряжением $U = 100$ В (см. рис.). Какую максимальную мощность можно получить на магазине сопротивлений?



Ответ: Максимальная мощность равна 45,37 Вт и достигается при сопротивлении магазина 60 Ом.

Решение: Выделяющаяся на магазине сопротивлений мощность определяется формулой

$$P = \frac{U^2 R_м}{(R_м + R_0)^2},$$

которую для анализа полезно преобразовать к виду

$$P = \frac{U^2}{R_0\left(\sqrt{\frac{R_м}{R_0}} + \sqrt{\frac{R_0}{R_м}}\right)^2}.$$

Сумма взаимно обратных величин в знаменателе имеет минимум при $R_м = R_0$. При этом выделяющаяся мощность имеет максимум. Поскольку условие = 55 Ом не может быть выполнено точно, нужно взять $R_м$ как можно ближе к 55 омам, т.е. проверить на максимум мощности значения 50 Ом и 60 Ом. При $R_м = 50$ Ом получается 45,35 Вт, а при $R_м = 60$ Ом 45,37 Вт. Таким образом, максимальная мощность равна 45,37 Вт.

Разбалловка: Написана выражение для выделяемой на магазине мощности – 2 балла.
Понято, что максимум мощности достигается при $R_м = R_0$ – 5 баллов.
Из двух значений $R_м = 50$ и 60 Ом выбрано правильное – 3 балла.
(За правильный ответ, полученный прямым перебором значений $R_м$, ставить 10 баллов.)