

Возможные решения задач

7 класс

1-й вариант

Задача 1. На заводе всё перепутали...

Начнём с того, что выразим указанную в ГОСТе стандартную плотность припоя $\rho_{\text{ст.}}$ через ρ_o и ρ_c . Пусть масса всего изготовленного припоя равна m . Тогда масса олова в нем $m_o = 0,4m$, а масса свинца $m_c = 0,6m$.

Теперь найдём объёмы олова и свинца.

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{m_o}{\rho_o} = \frac{0,4m}{\rho_o}, \\ V_c &= \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{0,6m}{\rho_c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Зная общую массу m и общий объём $V = V_o + V_c$, найдём плотность

$$\rho_{\text{ст.}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{0,4m}{\rho_o} + \frac{0,6m}{\rho_c}} = \frac{\rho_o \rho_c}{0,4\rho_c + 0,6\rho_o} \quad (2)$$

Можно вычислить величину $\rho_{\text{ст.}}$ по этой формуле, однако для нахождения ответа это не обязательно.

Выразим теперь получившуюся плотность припоя $\rho_{\text{пол.}}$. Пусть весь объём изготовленного припоя в этом случае равен V . Тогда объём олова $V_o = 0,4V$, а объём свинца $V_c = 0,6V$. Найдём массы олова и свинца в этом случае

$$\begin{aligned} m_o &= V_o \rho_o = 0,4V \rho_o, \\ m_c &= V_c \rho_c = 0,6V \rho_c. \end{aligned} \quad (3)$$

Зная общий объём V и общую массу $m = m_o + m_c$ найдём плотность

$$\rho_{\text{пол.}} = \frac{m}{V} = \frac{0,4V \rho_o + 0,6V \rho_c}{V} = 0,4\rho_o + 0,6\rho_c. \quad (4)$$

Остается найти отношение

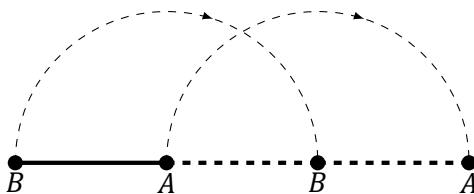
$$\frac{\rho_{\text{пол.}}}{\rho_{\text{ст.}}} = \frac{(0,4\rho_c + 0,6\rho_o)(0,4\rho_o + 0,6\rho_c)}{\rho_o \rho_c} \approx 1,05. \quad (5)$$

Ответ: Плотность припоя больше в 1,05 раз от стандартной.

№	Критерий	Баллы
1	Записано определение плотности в виде $\rho = \frac{m}{V}$.	2
2	Вычислена $\rho_{\text{ст.}} = 9,2 \text{ г/см}^3$. (число или выражение через ρ_o, ρ_c)	3
3	Вычислена $\rho_{\text{пол.}} = 9,7 \text{ г/см}^3$. (число или выражение через ρ_o, ρ_c)	3
4	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Задача 2. Робототехническая

Пусть длина отрезка AB равна l . Изобразим на рисунке движение робота с начального момента до того, как робот-палка в первый раз вернется в положение с тем же порядком точек A и B .



К этому моменту робот сместился на расстояние $2l$, а точка B проделала путь, равный половине длины окружности с радиусом l .

После этого движение начинается из того же положения, что и в начале. Так как по условию в конце движения порядок точек A и B такой же, как в начале, то все движение можно разбить на несколько одинаковых циклов. Пусть таких участков было N . Тогда общее перемещение робота $L = 2lN$. А траектория точки B состоит из N полуокружностей.

Длина одной окружности с радиусом l равна

$$s \approx 62,8 \text{ см} \frac{l}{10 \text{ см}} = 6,28 l. \quad (6)$$

Тогда общий путь точки B равен длине её траектории

$$S = \frac{s}{2} N = 3,14 \cdot l N. \quad (7)$$

Произведение lN можно найти, зная полное перемещение L

$$lN = \frac{L}{2}. \quad (8)$$

Тогда

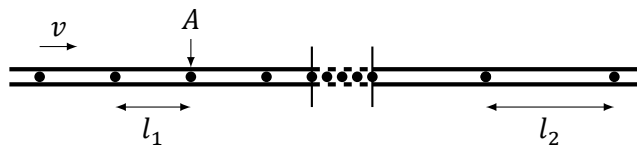
$$S = 3,14 \cdot \frac{L}{2} = 31,4 \text{ м}. \quad (9)$$

Ответ: Длина траектории точки B равна 31,4 м

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что было совершено целое число циклов.	3
2	Получено выражение для длины окружности с произвольным радиусом. (Формула (6))	2
3	Связь пути точки B с перемещением робота за один или несколько циклов. (Формулы (7,8) или (9))	3
4	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Задача 3. Проверка на дорогах

До переезда поток машин $N_1 = 50$ машин в минуту. Это означает, что за минуту мимо точки A проедет 50 машин. Обозначим расстояние между ними l_1 , а скорость движения v .



Тогда $t_1 = \frac{l_1}{v}$ это время, которое проходит между проездами двух соседних машин. Тогда

$$N_1 = \frac{1 \text{ минута}}{t_1} = 1 \text{ минута} \cdot \frac{v}{l_1}. \quad (10)$$

Значит произведение $N_1 l_1$ пропорционально скорости движения на первом участке, а $N_2 l_2$ — на втором. После переезда скорость движения машин не изменилась, значит

$$N_2 l_2 = N_1 l_1. \quad (11)$$

Отсюда следует, что

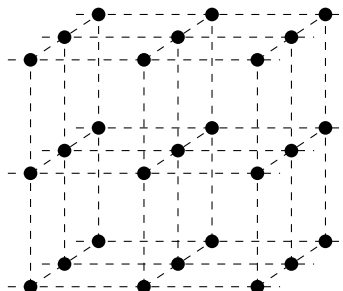
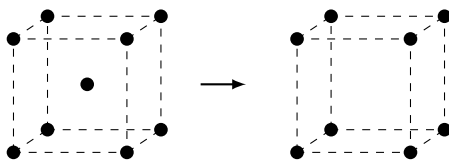
$$l_2 = \frac{N_1}{N_2} l_1 = 60 \text{ м}. \quad (12)$$

Ответ: Расстояние между машинами будет равно 60 м

№	Критерий	Баллы
1	Указано, как величина потока связана со скоростью и расстоянием между машинами (10), или указано соотношение (11).	7
2	Получен верный ответ.	3
	Сумма	10

Задача 4. Кристаллография

Масса некоторого количества такого материала будет пропорциональна количеству частиц, а объем — количеству ячеек («кубиков»).



Попробуем вычислить плотность материала, в котором все частицы расположены в вершинах. Пусть общее число ячеек равно N . Тогда может показаться, что общее число частиц равно $8N$, так как у кубика 8 вершин. Однако это неверно. Действительно, ведь каждая частица относится не к одному, а к 8 кубикам, поэтому была учтена 8 раз. Значит всего частиц $\frac{8N}{8} = N$. Пусть масса одной частицы m , а объем одной ячейки V . Тогда плотность материала

$$\rho_1 = \frac{N m}{N V} = \frac{m}{V}. \quad (13)$$

В материале с дополнительными частицами в центрах кубиков число частиц равно $\frac{8N}{8} + N = 2N$, и плотность

$$\rho_2 = \frac{2N m}{N V} = 2 \frac{m}{V}. \quad (14)$$

Тогда, если

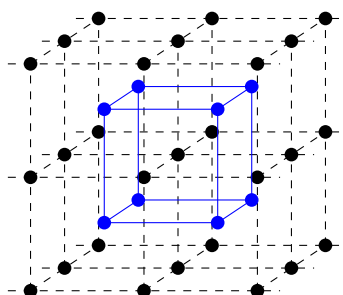
$$\rho_2 = 9 \text{ г/см}^3, \quad \rho_1 = \frac{1}{2} \rho_2 = 4,5 \text{ г/см}^3. \quad (15)$$

Ответ: Плотность получившегося материала равна $4,5 \text{ г/см}^3$

При решении мы неверно учли частицы, расположенные на границе материала. Однако доля таких частиц очень мала, поэтому их вкладом можно пренебречь.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что объем тела равен суммарному объему ячеек.	2
2	Указано, что масса тела равна суммарной массе частиц.	2
3	Указано, что каждая частица в вершине относится к нескольким ячейкам.	4
4	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Кроме того можно предложить альтернативное решение. В материале с дополнительными частицами можно увидеть, что дополнительные частицы образуют такую же решетку, сдвинутую относительно основной.

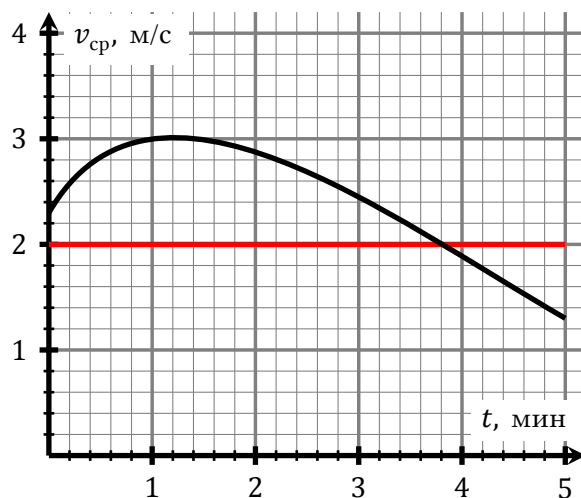


Тогда можно сказать, что в одном и том же объёме количество частиц в разных материалах отличается в два раза. Зная это, можно получить финальный ответ.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что можно построить вторую решетку внутри первой.	8
2	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Задача 5. Прогулки по воде

Вспомним определение средней скорости. Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за какой-то промежуток времени t равна расстоянию s пройденному за это время, деленному на t . Тогда в данной задаче, если мальчики встретились, то пройденные ими расстояния равны, а значит равны и средние скорости в момент встречи. Пользуясь этим утверждением, можно найти момент встречи по графику.



Так как Павел бежит с постоянной скоростью, его средняя скорость равна постоянной

$$v_{\text{ср}} = v = 2 \text{ м/с.} \quad (16)$$

Следовательно, точка, в которой график пересекает горизонтальную линию на уровне 2 м/с соответствует моменту встречи мальчиков. Исходя из графика $t \approx 3,8$ минуты. Тогда пройденное расстояние можно вычислить

$$s = vt = 2 \text{ м/с} \cdot 3,8 \cdot 60 \text{ с} = 456 \text{ м} \quad (17)$$

Ответ: Мальчики встретятся на расстоянии 456 м

№	Критерий	Баллы
1	Связь пройденного расстояния со средней скоростью.	1
2	Указано, что средние скорости равны, если мальчики встретились.	3
3	Средняя скорость второго мальчика равна 2 м/с.	2
4	Момент встречи найден по графику и попадает в промежуток (3,6 – 4,0)	2
5	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Возможные решения задач

7 класс

2-й вариант

Задача 1. На заводе всё перепутали...

Начнём с того, что выразим указанную в ГОСТе стандартную плотность припоя $\rho_{\text{ст.}}$ через ρ_o и ρ_c . Пусть масса всего изготовленного припоя равна m . Тогда масса олова в нем $m_o = 0,6m$, а масса свинца $m_c = 0,4m$.

Теперь найдём объёмы олова и свинца.

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{m_o}{\rho_o} = \frac{0,6m}{\rho_o}, \\ V_c &= \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{0,4m}{\rho_c}. \end{aligned} \quad (18)$$

Зная общую массу m и общий объём $V = V_o + V_c$, найдём плотность

$$\rho_{\text{ст.}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{0,6m}{\rho_o} + \frac{0,4m}{\rho_c}} = \frac{\rho_o \rho_c}{0,6\rho_c + 0,4\rho_o} \quad (19)$$

Можно вычислить величину $\rho_{\text{ст.}}$ по этой формуле, однако для нахождения ответа это не обязательно.

Выразим теперь получившуюся плотность припоя $\rho_{\text{пол.}}$. Пусть весь объём изготовленного припоя в этом случае равен V . Тогда объём олова $V_o = 0,6V$, а объём свинца $V_c = 0,4V$. Найдём массы олова и свинца в этом случае

$$\begin{aligned} m_o &= V_o \rho_o = 0,6V \rho_o, \\ m_c &= V_c \rho_c = 0,4V \rho_c. \end{aligned} \quad (20)$$

Зная общий объём V и общую массу $m = m_o + m_c$ найдём плотность

$$\rho_{\text{пол.}} = \frac{m}{V} = \frac{0,6V \rho_o + 0,4V \rho_c}{V} = 0,6\rho_o + 0,4\rho_c. \quad (21)$$

Остается найти отношение

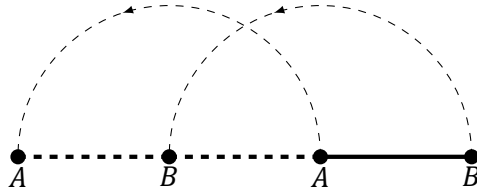
$$\frac{\rho_{\text{пол.}}}{\rho_{\text{ст.}}} = \frac{(0,6\rho_c + 0,4\rho_o)(0,6\rho_o + 0,4\rho_c)}{\rho_o \rho_c} \approx 1,05. \quad (22)$$

Ответ: Плотность припоя больше в 1,05 раз от стандартной.

№	Критерий	Баллы
1	Записано определение плотности в виде $\rho = \frac{m}{V}$.	2
2	Вычислена $\rho_{\text{ст.}} = 8,5 \text{ г/см}^3$. (число или выражение через ρ_o, ρ_c)	3
3	Вычислена $\rho_{\text{пол.}} = 8,9 \text{ г/см}^3$. (число или выражение через ρ_o, ρ_c)	3
4	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Задача 2. Робототехническая

Пусть длина отрезка AB равна l . Изобразим на рисунке движение робота с начального момента до того, как робот-палка в первый раз вернется в положение с тем же порядком точек A и B .



К этому моменту робот сместился на расстояние $2l$, а точка B проделала путь, равный половине длины окружности с радиусом l .

После этого движение начинается из того же положения, что и в начале. Так как по условию в конце движения порядок точек A и B такой же, как в начале, то все движение можно разбить на несколько одинаковых циклов. Пусть таких участков было N . Тогда общее перемещение робота $L = 2lN$. А траектория точки B состоит из N полуокружностей.

Длина одной окружности с радиусом l равна

$$s \approx 62,8 \text{ см} \frac{l}{10 \text{ см}} = 6,28 l. \quad (23)$$

Тогда общий путь точки B равен длине её траектории

$$S = \frac{s}{2} N = 3,14 \cdot lN. \quad (24)$$

Произведение lN можно найти, зная полное перемещение L

$$lN = \frac{L}{2}. \quad (25)$$

Тогда

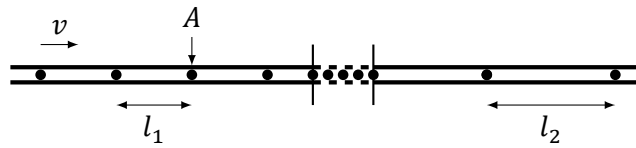
$$S = 3,14 \cdot \frac{L}{2} = 47,1 \text{ м}. \quad (26)$$

Ответ: Длина траектории точки B равна 47,1 м

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что было совершено целое число циклов.	3
2	Получено выражение для длины окружности с произвольным радиусом. (Формула (23))	2
3	Связь пути точки B с перемещением робота за один или несколько циклов. (Формулы (24,25) или (26))	3
4	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Задача 3. Проверка на дорогах

До переезда поток машин $N_1 = 50$ машин в минуту. Это означает, что за минуту мимо точки A проедет 50 машин. Обозначим расстояние между ними l_1 , а скорость движения v .



Тогда $t_1 = \frac{l_1}{v}$ это время, которое проходит между проездами двух соседних машин. Тогда

$$N_1 = \frac{1 \text{ минута}}{t_1} = 1 \text{ минута} \cdot \frac{v}{l_1}. \quad (27)$$

Значит произведение $N_1 l_1$ пропорционально скорости движения на первом участке, а $N_2 l_2$ — на втором. После переезда скорость движения машин не изменилась, значит

$$N_2 l_2 = N_1 l_1. \quad (28)$$

Отсюда следует, что

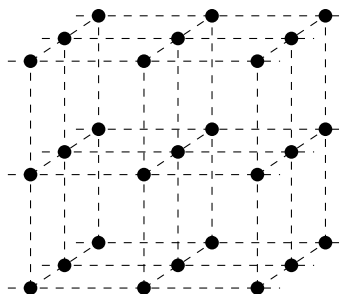
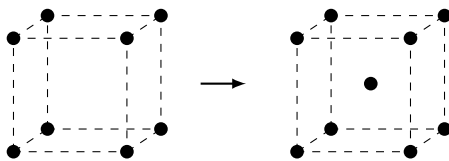
$$l_2 = \frac{N_1}{N_2} l_1 = 80 \text{ м}. \quad (29)$$

Ответ: Расстояние между машинами будет равно 80 м

№	Критерий	Баллы
1	Указано, как величина потока связана со скоростью и расстоянием между машинами (27), или указано соотношение (28).	7
2	Получен верный ответ.	3
	Сумма	10

Задача 4. Кристаллография

Масса некоторого количества такого материала будет пропорциональна количеству частиц, а объем — количеству ячеек («кубиков»).



Попробуем вычислить плотность материала, в котором все частицы расположены в вершинах. Пусть общее число ячеек равно N . Тогда может показаться, что общее число частиц равно $8N$, так как у кубика 8 вершин. Однако это неверно. Действительно, ведь каждая частица относится не к одному, а к 8 кубикам, поэтому была учтена 8 раз. Значит всего частиц $\frac{8N}{8} = N$. Пусть масса одной частицы m , а объем одной ячейки V . Тогда плотность материала

$$\rho_1 = \frac{N m}{N V} = \frac{m}{V}. \quad (30)$$

В материале с дополнительными частицами в центрах кубиков число частиц равно $\frac{8N}{8} + N = 2N$, и плотность

$$\rho_2 = \frac{2N m}{N V} = 2 \frac{m}{V}. \quad (31)$$

Тогда, если

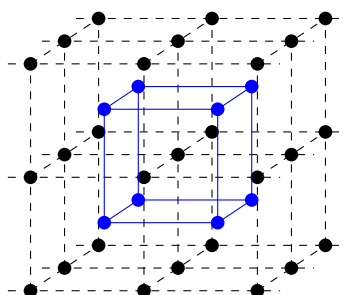
$$\rho_1 = 8 \text{ г/см}^3, \quad \rho_2 = 2 \rho_1 = 16 \text{ г/см}^3. \quad (32)$$

Ответ: Плотность получившегося материала равна 16 г/см^3

При решении мы неверно учли частицы, расположенные на границе материала. Однако доля таких частиц очень мала, поэтому их вкладом можно пренебречь.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что объем тела равен суммарному объему ячеек.	2
2	Указано, что масса тела равна суммарной массе частиц.	2
3	Указано, что каждая частица в вершине относится к нескольким ячейкам.	4
4	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Кроме того можно предложить альтернативное решение. В материале с дополнительными частицами можно увидеть, что дополнительные частицы образуют такую же решетку, сдвинутую относительно основной.

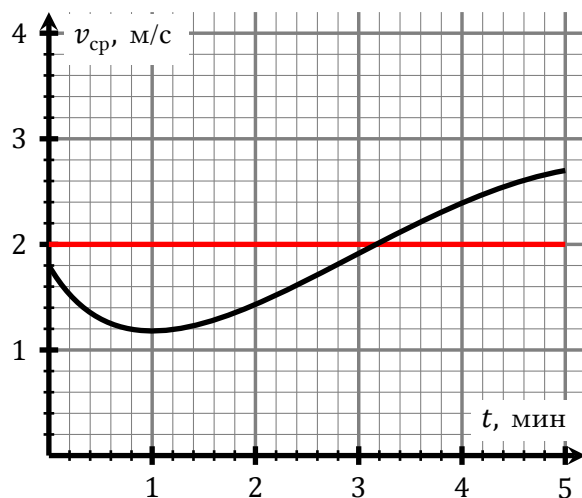


Тогда можно сказать, что в одном и том же объёме количество частиц в разных материалах отличается в два раза. Зная это, можно получить финальный ответ.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что можно построить вторую решетку внутри первой.	8
2	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10

Задача 5. Прогулки по воде

Вспомним определение средней скорости. Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за какой-то промежуток времени t равна расстоянию s пройденному за это время, деленному на t . Тогда в данной задаче, если мальчики встретились, то пройденные ими расстояния равны, а значит равны и средние скорости в момент встречи. Пользуясь этим утверждением, можно найти момент встречи по графику.



Так как Павел бежит с постоянной скоростью, его средняя скорость равна постоянной

$$v_{\text{ср}} = v = 2 \text{ м/с.} \quad (33)$$

Следовательно, точка, в которой график пересекает горизонтальную линию на уровне 2 м/с соответствует моменту встречи мальчиков. Исходя из графика $t \approx 3,2$ минуты. Тогда пройденное расстояние можно вычислить

$$s = vt = 2 \text{ м/с} \cdot 3,2 \cdot 60 \text{ с} = 384 \text{ м} \quad (34)$$

Ответ: Мальчики встретятся на расстоянии 384 м

№	Критерий	Баллы
1	Связь пройденного расстояния со средней скоростью.	1
2	Указано, что средние скорости равны, если мальчики встретились.	3
3	Средняя скорость второго мальчика равна 2 м/с.	2
4	Момент встречи найден по графику и попадает в промежуток (3,0 – 3,4)	2
5	Получен верный ответ.	2
	Сумма	10