Возможные решения задач

8 класс

1-й вариант

Задача 1. Шары или сферы

Сначала, определим во сколько раз отличаются диаметры шаров. Шар однозначно определяется своим диаметром, а значит любые его геометрические параметры тоже выражаются исключительно через диаметр. Исходя из соображений размерности,

$$V_{\text{шара}} = \alpha \cdot d^3, \tag{1}$$

где α — некоторый безразмерный коэффициент. Значит, если объёмы шаров относятся как $1 : 64$, их диаметры должны относится как $1 : 4$.

Поймём, как зависит объём сферы с тонкими стенками от их толщины h и диаметра сферы d. Этот вопрос аналогичен вопросу про количество краски, которая требуется для того, чтобы покрыть тонким слоем поверхность. Интуитивно понятно, что количество краски пропорционально площади этой поверхности.

Чтобы получить эту зависимость строго, посчитаем объём как разность объёмов двух шаров, диаметры которых отличаются на $2h$

$$\begin{aligned} V_{\text{сферы}} &= \alpha \cdot (d+2h)^3 - \alpha \cdot d^3 = \alpha\left(d^3 + 6d^2h + 6dh^2 + 8h^3 - d^3\right) = \\ &= \alpha \cdot 6d^2h \cdot \left(1 + \frac{h}{d} + \frac{4}{3}\frac{h^2}{d^2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что стенки тонкие, то есть отношение h/d мало по сравнению с единицей. Поэтому можно пренебречь всеми слагаемыми в скобках кроме первого. Получили, что объём сферы с тонкими стенками толщины h равен

$$V_{\text{сферы}} = 6\alpha \cdot hd^2. \tag{3}$$

Это значит, что если для изготовления маленькой сферы потребовался 1 кг, то для большой потребуется 16 кг (их диаметры отличаются в 4 раза). Поэтому останется $(64 - 16)$ кг $= 48$ кг материала.

Ответ: Останется 48 кг материала.

№	Критерий	Баллы
1	Сформулировано, что объём шара пропорционален кубу диаметра (без доказательства) • Если использована явная формула для объёма шара с неверным коэффициентом.	4 2
2	Сформулировано, что объём сферы пропорционален её площади (без доказательства) • Если использована явная формула для объёма шара с неверным коэффициентом.	4 2
3	Ответ	2
	Сумма	10

Задача 2. Из пустого в порожнее

Проследим мысленно за жидкостью из первого ведра отдельно. В начале её температура была 4 °C, а после переливания и нагрева стала равна 20 °C. Если теплоёмкость жидкости c, а плотность ρ, на это потребовалась теплота

$$Q_1 = c\rho \cdot 1\text{ л} \cdot (20\,^\circ\text{C} - 4\,^\circ\text{C}) = c\rho \cdot 16\,^\circ\text{C} \cdot \text{л}. \tag{4}$$

Для нагрева жидкости из второго ведра необходима теплота

$$Q_2 = c\rho \cdot 2\text{ л} \cdot (20\,^\circ\text{C} - 8\,^\circ\text{C}) = c\rho \cdot 16\,^\circ\text{C} \cdot \text{л}, \tag{5}$$

а для жидкости из третьего

$$Q_3 = c\rho \cdot 4\text{ л} \cdot (20\,^\circ\text{C} - 16\,^\circ\text{C}) = c\rho \cdot 16\,^\circ\text{C} \cdot \text{л}. \tag{6}$$

Видно, что $Q_1 = Q_2 = Q_3$, поэтому всего потребуется теплоты

$$Q_\Sigma = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3Q_3. \tag{7}$$

Из условия известно, что $Q_3 = 70$ кДж.

<u>**Ответ:**</u> На нагрев жидкости в третьем ведре потребуется $Q_\Sigma = 3Q_3 = 210$ кДж.

№	Критерий	Баллы
1	Замечено, что можно считать нагрев жидкостей из разных вёдер «независимо»	2
2	Три различных уравнения теплового баланса (по два балла за каждое) или любое другое верное обоснование того, что для нагрева воды во всех сосудах требуется одно и то же количество теплоты	6
3	Ответ	2
	Сумма	10

Примечание: если решение строится на последовательной записи уравнений теплового баланса для переливаний и нагрева, то следует использовать следующую разбалловку

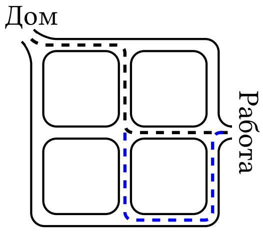
№	Критерий	Баллы
1	За систему уравнений теплового баланса (**2 балла** за уравнение, но в сумме не более **6** баллов)	6
2	Ответ	4
	Сумма	10

Задача 3. Необычный день

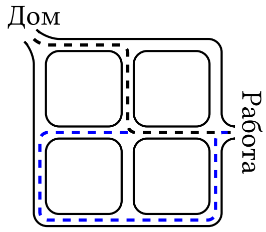
Пускай длина одного участка дороги ℓ, а обычная скорость мистера Смита v. Тогда до неудачного дня, на дорогу от дома до работы уходило время

$$T_{\text{обычно}} = \frac{3\ell}{v}. \tag{8}$$

Посмотрим, куда мистер Смит мог повернуть утром. Заметим, что у него есть только два варианта ошибиться. В одном из них он проехал с увеличенной скоростью nv расстояние 3ℓ, а в другом 5ℓ. То есть время поездки на работу могло быть

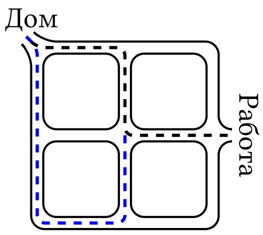


$$T^{\mathrm{I}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} \tag{9}$$

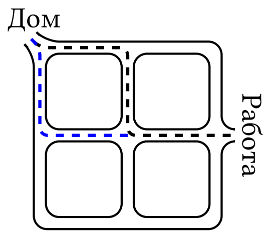


$$T^{\mathrm{II}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} \tag{10}$$

Вечером у мистера Смита тоже было два варианта



$$T^{\mathrm{I}}_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v} \tag{11}$$



$$T^{\mathrm{II}}_{\text{вечер}} = \frac{3\ell}{v} \tag{12}$$

Из условия известно, что на дорогу ушло больше времени, чем обычно, значит подходит только первый вариант

$$T_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v}. \tag{13}$$

Пока что складывается впечатление, что у задачи есть два решения. Найдём их, приравняв времена, которые ушли на дорогу утром и вечером

$$\frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = 1. \tag{14}$$

То есть скорость не увеличивалась. Этот вариант не подходит по условию задачи. Разберёмся с оставшимся

$$\frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{5\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{5}{3}. \tag{15}$$

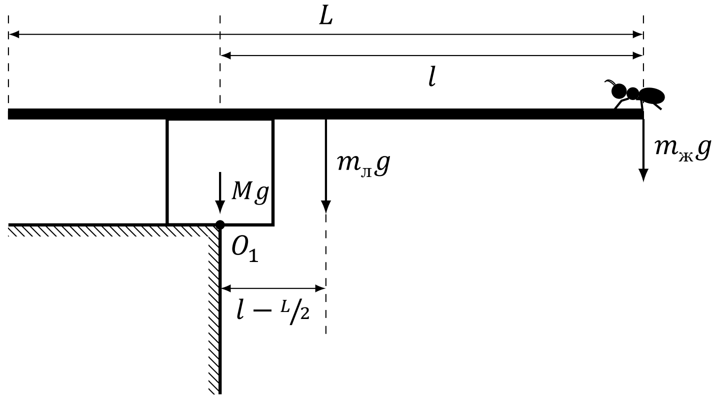
Ответ: мистер Смит увеличил скорость в $^5/_3$ раз.

№	Критерий	Баллы
1	Указаны оба варианта траектории утром • Если указан только один вариант траектории	4 2
2	Верно указана траектория вечером	2
3	Показано, что одна из траекторий не подходит	2
4	Ответ	2
	Сумма	10

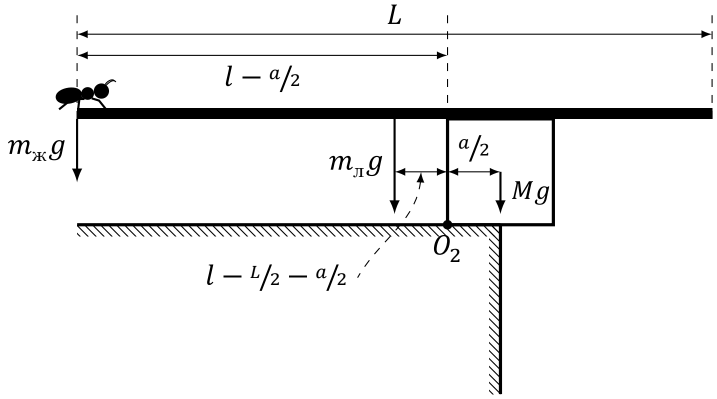
Задача 4. Жук на склоне

Первым делом заметим, что можно рассматривать только ситуации, когда жук находится на краю линейки. Пусть жук не на краю линейки и система находится в равновесии. Тогда можно переклеить линейку и сместить жука в разные стороны таким образом, чтобы их центр масс остался на месте. При этом жук удалится от края стола, а система не выйдет из равновесия (центр масс не изменил своего положения).

Теперь посмотрим, что происходит, если жук находится на правом конце линейки. Так как по условию $l > L/2$, и сила тяжести линейки, и сила тяжести жука «закручивают» систему по часовой стрелке. Причём эти силы ничем не уравновешены, и система начнёт вращаться относительно точки O_1.



Разберёмся со случаем, когда жук сидит на левом краю линейки. Тогда при нарушении равновесия вращение начнётся относительно угла кубика (O_2)



Запишем правило рычага относительно точки O_2 для случая, когда жук находится над столом

$$M \cdot \frac{a}{2} = m_ж \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + m_л \cdot \left(l - \frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right), \tag{16}$$

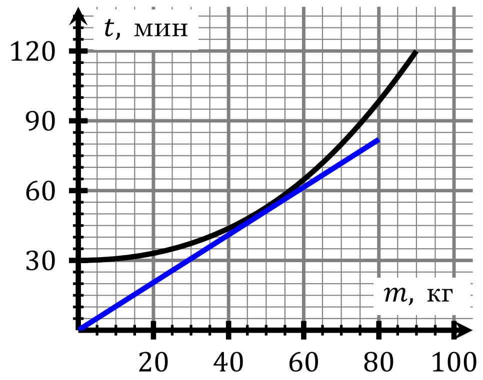
Отсюда можно выразить массу жука

$$m_ж = \frac{1}{2l - a}\big(M \cdot a - m_л \cdot (2l - L - a)\big) = \\ = \frac{1}{35 \text{ см}}\big(22 \text{ г} \cdot 5 \text{ см} - 15 \text{ г} \cdot (40 \text{ см} - 30 \text{ см} - 5 \text{ см})\big) = \frac{120 - 85}{35} \text{ г} = 1 \text{ г} \tag{17}$$

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что жук не может сидеть справа от стола	2
2	Указано, что в случае, когда жук сидит на левом краю вращение будет происходить относительно точки O_2	2
3	Правило рычага для случая, когда жук сидит на левом краю	4
4	Ответ	2
	Сумма	10

Задача 5. Ответственный мальчик

Нас интересует минимальное время, за которое мальчик может перевезти весь мусор. Время будет минимально, когда отношение $\frac{m}{t}$, то есть «скорость» вывоза мусора, должно быть максимальным. На графике это соответствует самой пологой прямой, которая выходит из нуля и имеет общую точку с графиком.



Из графика видно, что оптимальное отношение

$$\frac{t}{m} \approx \frac{80}{82} \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \tag{18}$$

поэтому на то, чтобы перевезти весь мусор потребуется время

$$T = 2000 \text{ кг} \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \approx 32{,}5 \text{ ч} \tag{19}$$

№	Критерий	Баллы
1	Получена связь суммарного времени, которое требуется на вывоз мусора, с временем, которое уходит на один рейс	1
2	Указано, что следует проводить самую пологую прямую, проходящую через ноль и имеющую с графиком общую точку. (Если проводится касательная не через 0, ставится **0 баллов**)	6
3	Ответ • если ответ попадает в промежуток от 31 часа до 34 часов • если ответ попадает в промежуток от 29,5 часов до 35,5 часов • если ответ попадает в промежуток от 28 часов до 37 часов	3 3 2 1
	Сумма	10

Возможные решения задач
8 класс
2-й вариант

Задача 1. Шары или сферы

Сначала, определим во сколько раз отличаются диаметры шаров. Шар однозначно определяется своим диаметром, а значит любые его геометрические параметры тоже выражаются исключительно через диаметр. Исходя из соображений размерности,

$$V_{\text{шара}} = \alpha \cdot d^3, \tag{20}$$

где α — некоторый безразмерный коэффициент. Значит, если объёмы шаров относятся как $1 : 64$, их диаметры должны относится как $1 : 4$.

Поймём, как зависит объём сферы с тонкими стенками от их толщины h и диаметра сферы d. Этот вопрос аналогичен вопросу про количество краски, которая требуется для того, чтобы покрыть тонким слоем поверхность. Интуитивно понятно, что количество краски пропорционально площади этой поверхности.

Чтобы получить эту зависимость строго, посчитаем объём как разность объёмов двух шаров, диаметры которых отличаются на $2h$

$$\begin{aligned} V_{\text{сферы}} &= \alpha \cdot (d + 2h)^3 - \alpha \cdot d^3 = \alpha\left(d^3 + 6d^2h + 6dh^2 + 8h^3 - d^3\right) = \\ &= \alpha \cdot 6d^2h \cdot \left(1 + \frac{h}{d} + \frac{4}{3}\frac{h^2}{d^2}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что стенки тонкие, то есть отношение h/d мало по сравнению с единицей. Поэтому можно пренебречь всеми слагаемыми в скобках кроме первого. Получили, что объём сферы с тонкими стенками толщины h равен

$$V_{\text{сферы}} = 6\alpha \cdot hd^2. \tag{22}$$

Это значит, что если для изготовления маленькой сферы потребовался 1 кг, то для большой потребуется 16 кг (их диаметры отличаются в 4 раза). Поэтому из заказанного материала можно отлить $\frac{64}{16} = 4$ большие сферы.

<u>**Ответ:**</u> Из заказанного материала можно отлить 4 большие сферы.

№	Критерий	Баллы
1	Сформулировано, что объём шара пропорционален кубу диаметра (без доказательства) • Если использована явная формула для объёма шара с неверным коэффициентом.	4 2
2	Сформулировано, что объём сферы пропорционален её площади (без доказательства) • Если использована явная формула для объёма шара с неверным коэффициентом.	4 2
3	Ответ	2
	Сумма	10

Задача 2. Из пустого в порожнее

Проследим мысленно за жидкостью из первого ведра отдельно. В начале её температура была 4 °C, а после переливания и нагрева стала равна 20 °C. Если теплоёмкость жидкости c, а плотность ρ, на это потребовалась теплота

$$Q_1 = c\rho \cdot 1\text{ л} \cdot (20\text{ °C} - 4\text{ °C}) = c\rho \cdot 16\text{ °C} \cdot \text{л}. \tag{23}$$

Для нагрева жидкости из второго ведра необходима теплота

$$Q_2 = c\rho \cdot 2\text{ л} \cdot (20\text{ °C} - 8\text{ °C}) = c\rho \cdot 16\text{ °C} \cdot \text{л}, \tag{24}$$

а для жидкости из третьего

$$Q_3 = c\rho \cdot 4\text{ л} \cdot (20\text{ °C} - 16\text{ °C}) = c\rho \cdot 16\text{ °C} \cdot \text{л}. \tag{25}$$

Видно, что $Q_1 = Q_2 = Q_3$, поэтому всего потребуется теплоты

$$Q_\Sigma = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3Q_1. \tag{26}$$

Из условия известно, что $Q_1 = 90$ кДж.

Ответ: На нагрев жидкости в третьем ведре потребуется $Q_\Sigma = 3Q_1 = 270$ кДж.

№	**Критерий**	**Баллы**
1	Замечено, что можно считать нагрев жидкостей из разных вёдер «независимо»	2
2	Три различных уравнения теплового баланса (по два балла за каждое) или любое другое верное обоснование того, что для нагрева воды во всех сосудах требуется одно и то же количество теплоты	6
3	Ответ	2
	Сумма	10

Примечание: если решение строится на последовательной записи уравнений теплового баланса для переливаний и нагрева, то следует использовать следующую разбалловку

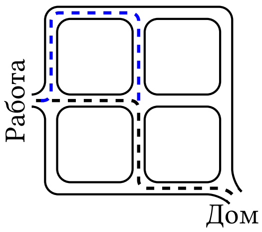
№	**Критерий**	**Баллы**
1	За систему уравнений теплового баланса (**2 балла** за уравнение, но в сумме не более **6** баллов)	6
2	Ответ	4
	Сумма	10

Задача 3. Необычный день

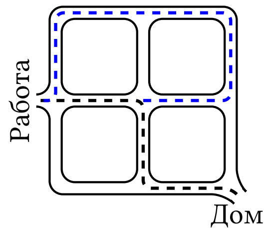
Пускай длина одного участка дороги ℓ, а обычная скорость мистера Смита v. Тогда до неудачного дня, на дорогу от дома до работы уходило время

$$T_{\text{обычно}} = \frac{3\ell}{v}. \tag{27}$$

Посмотрим, куда мистер Смит мог повернуть утром. Заметим, что у него есть только два варианта ошибиться. В одном из них он проехал с увеличенной скоростью nv расстояние 3ℓ, а в другом 5ℓ. То есть время, поездки на работу могло быть

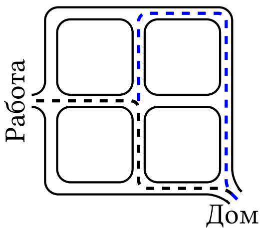


$$T^{\mathrm{I}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} \tag{28}$$

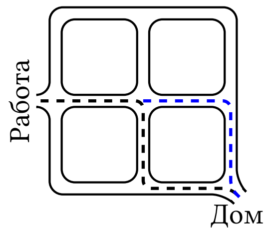


$$T^{\mathrm{II}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} \tag{29}$$

Вечером у мистера Смита тоже было два варианта



$$T^{\mathrm{I}}_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v} \tag{30}$$



$$T^{\mathrm{II}}_{\text{вечер}} = \frac{3\ell}{v} \tag{31}$$

Из условия известно, что на дорогу ушло больше времени, чем обычно, значит подходит только первый вариант

$$T_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v}. \tag{32}$$

Пока что складывается впечатление, что у задачи есть два решения. Найдём их, приравняв времена, которые ушли на дорогу утром и вечером

$$\frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = 1. \tag{33}$$

То есть скорость не увеличивалась. Этот вариант не подходит по условию задачи. Разберёмся с оставшимся

$$\frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{5\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{5}{3}. \tag{34}$$

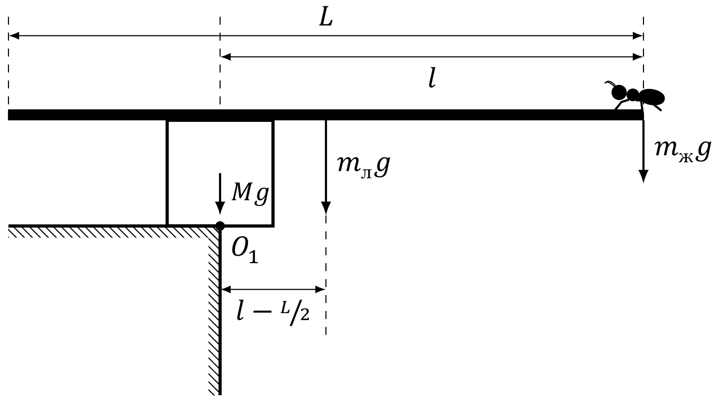
Ответ: мистер Смит увеличил скорость в $5/3$ раз.

№	Критерий	Баллы
1	Указаны оба варианта траектории утром • Если указан только один вариант траектории	4 2
2	Верно указана траектория вечером	2
3	Показано, что одна из траекторий не подходит	2
4	Ответ	2
	Сумма	10

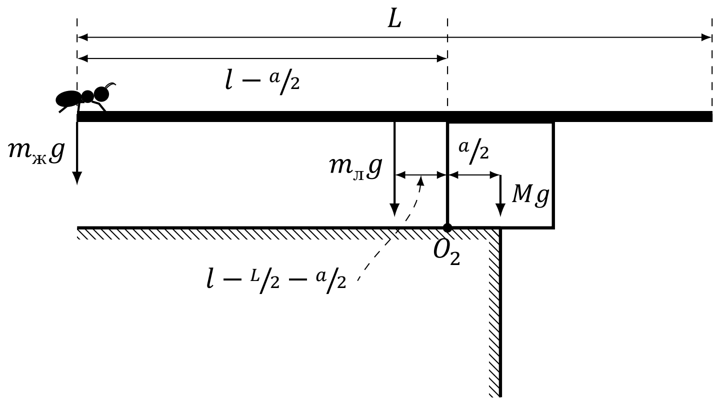
Задача 4. Жук на склоне

Первым делом заметим, что можно рассматривать только ситуации, когда жук находится на краю линейки. Пусть жук не на краю линейки и система находится в равновесии. Тогда можно переклеить линейку и сместить жука в разные стороны таким образом, чтобы их центр масс остался на месте. При этом жук удалится от края стола, а система не выйдет из равновесия (центр масс не изменил своего положения).

Теперь посмотрим, что происходит, если жук находится на правом конце линейки. Так как по условию $l > L/2$, и сила тяжести линейки, и сила тяжести жука «закручивают» систему по часовой стрелке. Причём эти силы ничем не уравновешены, и система начнёт вращаться относительно точки O_1.



Разберёмся со случаем, когда жук сидит на левом краю линейки. Тогда при нарушении равновесия вращение начнётся относительно угла кубика (O_2)



Запишем правило рычага относительно точки O_2 для случая, когда жук находится над столом

$$M \cdot \frac{a}{2} = m_ж \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + m_л \cdot \left(l - \frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right), \tag{35}$$

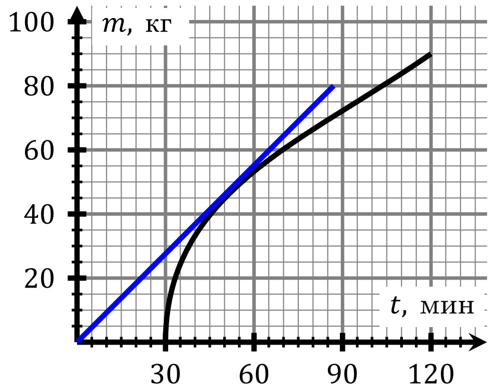
Отсюда можно выразить массу кубика

$$M = \frac{2}{a}\left(m_ж \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + m_л \cdot \left(l - \frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right)\right) = \\ = \frac{2}{5\text{ см}}\left(2\text{ г} \cdot (20\text{ см} - 2{,}5\text{ см}) + 15\text{ г} \cdot (20\text{ см} - 15\text{ см} - 2{,}5\text{ см})\right)\text{ г} = \frac{2 \cdot 72{,}5}{5} = 29\text{ г} \tag{36}$$

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что жук не может сидеть справа от стола	2
2	Указано, что в случае, когда жук сидит на левом краю вращение будет происходить относительно точки O_2	2
3	Правило рычага для случая, когда жук сидит на левом краю	4
4	Ответ	2
	Сумма	10

Задача 5. Ответственный мальчик

Нас интересует минимальное время, за которое мальчик может перевезти весь мусор. Время будет минимально, когда отношение $\frac{m}{t}$, то есть «скорость» вывоза мусора, должно быть максимальным. На графике это соответствует самой крутой прямой, которая выходит из нуля и имеет общую точку с графиком.



Из графика видно, что оптимальное отношение

$$\frac{t}{m} \approx \frac{90}{88} \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \tag{37}$$

поэтому на то, чтобы перевезти весь мусор потребуется время

$$T = 2000 \text{ кг} \, \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \approx 34 \text{ ч} \tag{38}$$

№	Критерий	Баллы
1	Получена связь суммарного времени, которое требуется на вывоз мусора, с временем, которое уходит на один рейс	1
2	Указано, что следует проводить самую крутую прямую, проходящую через ноль и имеющую с графиком общую точку. (Если проводится касательная не через 0, ставится **0 баллов**)	6
3	Ответ • если ответ попадает в промежуток от 32,5 часа до 35,5 часов • если ответ попадает в промежуток от 31 часов до 37 часов • если ответ попадает в промежуток от 29,5 часов до 38,5 часов	3 3 2 1
	Сумма	10