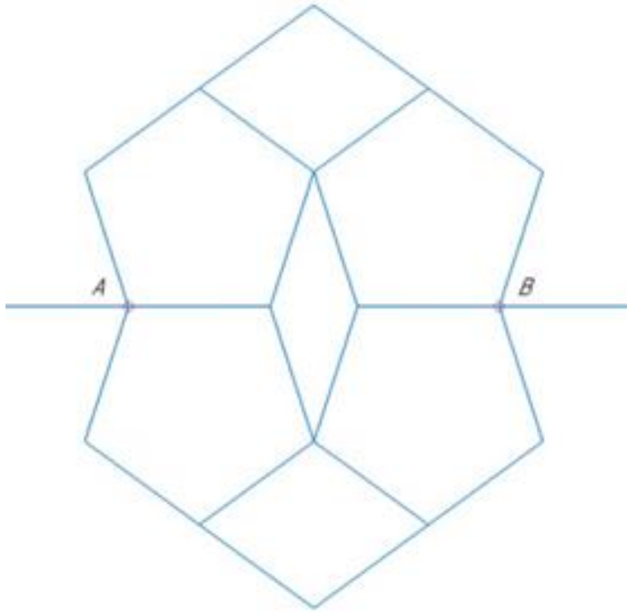
1. «Схема»

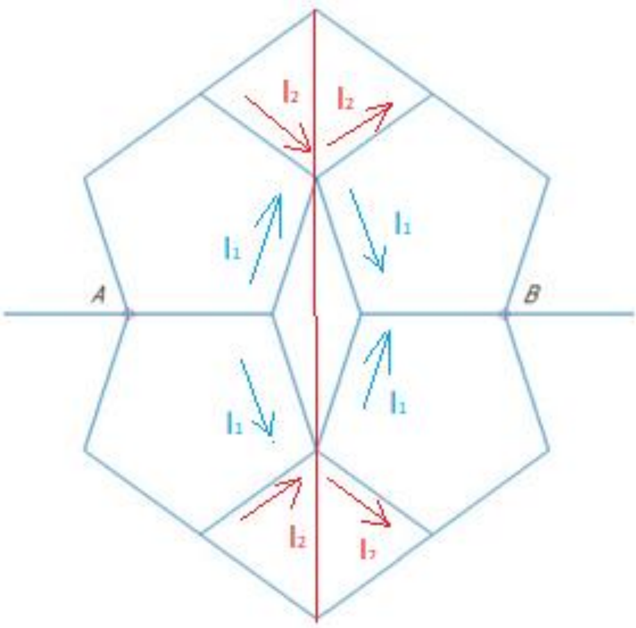
Определите сопротивление между точками А и В, если каждое ребро имеет сопротивление, которое равно R.



Возможное решение:

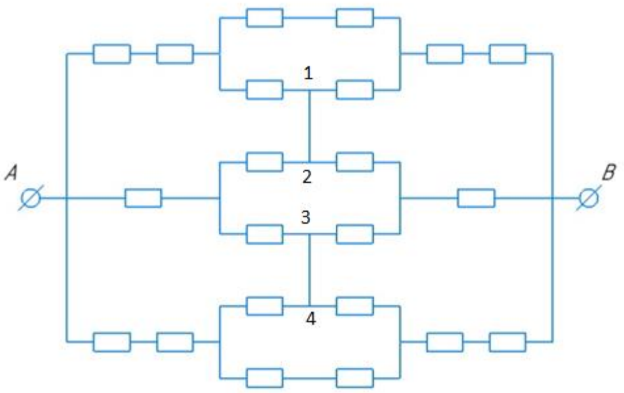
В большинстве соединений понятно, как и куда текут тока, но есть два «сложных» места , где сходятся 4 провода (помимо точек А и В).

Если мы рассмотрим данную схему внимательно, то заметим, что при смене полярности подключаемого источника, токи по всем симметричным относительно вертикальной (выделена красным) оси одинаковы. Следовательно, в самых «сложных» местах токи текут так, как показано на рисунке

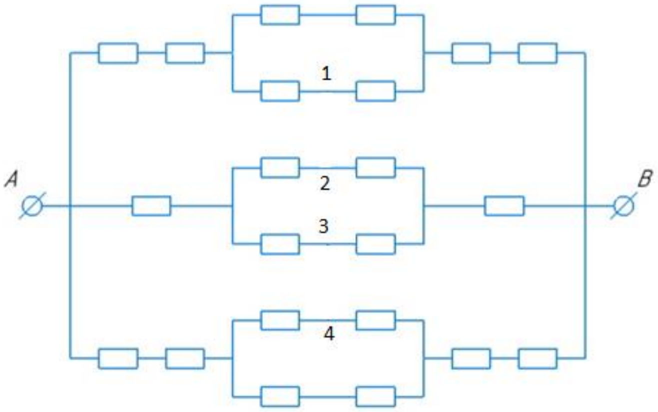


Изобразим данную в задаче схему в виде эквивалентной ей.

Каждый резистор имеет сопротивление R.



Поскольку токи между 1 и 2, 3 и 4 не текут => эти соединения мы можем просто убрать из эквивалентной схемы. Тогда имеем:



Сопротивление этой схемы уже легко считается. Итоговое значение:

$$R_0 = \frac{15}{11} R$$

Система оценивания задачи:

Изображены направления токов в «сложных» местах– **2 балла**

Построена эквивалентная схема – **2 балла**

Показано, почему между точками 1 и 2, 3 и 4 ток не течёт, и построена новая эквивалентная схема– **3 балла**

Записаны законы последовательного и параллельного соединения – **1 балл**

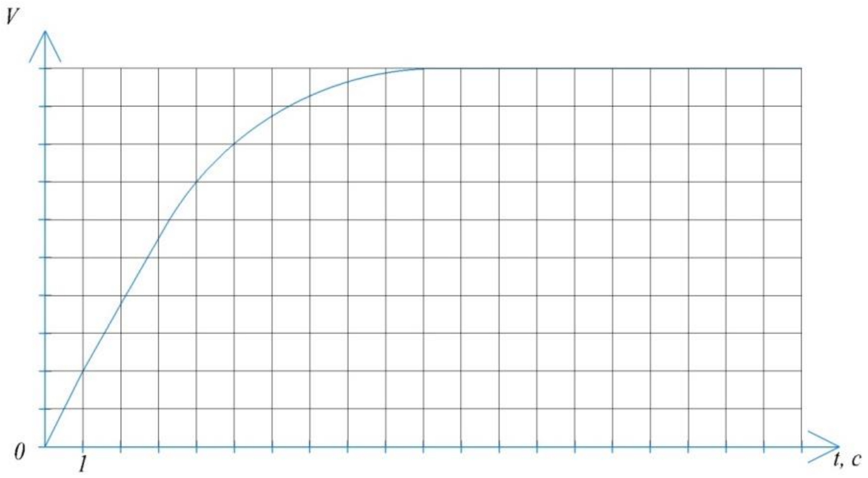
Получено общее сопротивление на данном участке – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Учения»

На учениях из пикирующего с начальной скоростью 0 м/с бомбардировщика на большой высоте сброшена авиабомба массой 70 кг. Для оценки потерь энергии на трение бомбе был установлен датчик скорости. По графику зависимости скорости бомбы от времени определите тепловую мощность, выделяющуюся из-за трения в моменты $t_1 = 4$ с и t_2 = 19 с.

Примечание: во время печати графика принтеру не хватило чернил на градуировку шкалы скоростей.



Возможное решение:

Прежде всего проградуируем ось скоростей.

Начальная скорость равна нулю, а значит, равна нулю и сила трения, действующая на авиабомбу. Поэтому в первое время тело движется с ускорением свободного падения $g = 10\frac{\text{м}}{c^2}$. Проведём касательную к графику в точке $t = 0$. Тангенс угла наклона касательной равен g и равен 2 дел/с. Следовательно, одному делению соответствует 5 м/с.

Проще всего определить тепловую мощность, выделяющуюся в момент времени и $t_2 = 19$ с. К этому моменту скорость тела перестаёт меняться, значит, сила трения компенсирует силу тяжести и равна mg. Скорость тела определяется из графика и равна $v_2 = 50\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Таким образом, выделяющаяся тепловая мощность равна мощности силы трения $P_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}v_2 = mgv_2 = 35$ кВт.

Чтобы определить мощность, выделяющуюся в момент времени $t_1 = 4$ с, необходимо воспользоваться вторым законом Ньютона в системе отсчёта Земля для авиабомбы.

$m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}}$, где a и $F_{\text{тр}}$ – ускорение и сила трения в момент времени $t_1 = 4$ с соответственно. Скорость авиабомбы равна $v_1 = 35\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Ускорение можно определить по тангенсу угла наклона касательной к графику в данной точке, оно равно $a \approx 6{,}7\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Тогда, спроецировав закон на вертикальную ось получим, что $F_{\text{тр}} = m(g - a) => P = F_{\text{тр}}v_1 = m(g - a)v_1 = 8085$ Вт.

Система оценивания задачи:

Проградуирована шкала скоростей – **2 балла**

Написана формула мощности тепловых потерь – **1 балл**

Написан второй закон Ньютона для данного движения – **1 балл**

Найдено ускорение авиабомбы в момент времени t_1 – **1 балл**

Выражена сила трения в момент времени t_1 – **1 балл**

Показано, что ускорение авиабомбы в момент времени t_2 равно нулю – **1 балл**

Выражена сила трения в момент времени t_2 – **1 балл**

Найдена мощность в момент времени t_1 – **1 балл**

Найдена мощность в момент времени t_2 – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Прогулка»

Два брата, Коля и Петя, вместе выходят из дома на прогулку по прямой берёзовой аллее. Петя сразу набирает скорость $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и идёт всё время с такой скоростью. Коля решил сэкономить силы, начав движение со скоростью $v < 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Затем Коля стал увеличивать свою скорость через равные промежутки времени $\Delta t = 1$с сначала на $\frac{1}{4}\frac{\text{м}}{\text{с}}$, потом на $\frac{1}{8}\frac{\text{м}}{\text{с}}$, потом на $\frac{1}{16}\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и т.д.

1) С какой минимальной скоростью должен был начать движение Коля, чтобы к концу девятнадцатой секунды после начала движения перестать отставать от Пети?

2) На каком расстоянии от Пети окажется Коля к концу девятнадцатой секунды после начала движения?

Возможное решение:

1) Перестать отставать Коля будет тогда, когда его скорость будет равна скорости Пети, т.е. $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Тогда если v – искомая минимальная начальная скорость Коли, то

$$v = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^{20}}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}} = \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{20}}\right)\right)\frac{\text{м}}{\text{с}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{20}}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

2) Поскольку движение Коли кусочно-равномерное, путь Коли за первые 20 с будет равен

$$S_\text{К} = \sum_{i=1}^{20} v_i \Delta t \qquad (1)$$

где $v_1 = v, v_2 = v + \frac{1}{4}$ и так далее.

После маленького преобразования этого ряда получится:

$$S_\text{К} = 20v\Delta t + \Delta t \sum_{i=1}^{19} \frac{(20-i)}{2^{i+1}} = \Delta t\left(\frac{20}{2} + \frac{20}{2^{20}} + 20\sum_{i=1}^{19}\frac{1}{2^{i+1}} - \sum_{i=1}^{19}\frac{i}{2^{i+1}}\right) = 20\Delta t - \sum_{i=1}^{19}\frac{i}{2^{i+1}}\Delta t \qquad (2)$$

Тогда расстояние между Петей и Колей найдём так:

$$S_\text{П} - S_\text{К} = \sum_{i=1}^{19}\frac{i}{2^{i+1}}\Delta t = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{21}{2^{19}}\right)\Delta t = (1 - \frac{21}{2^{20}})\text{м}$$

Система оценивания задачи:

Указано условие прекращения отставания Коли от Пети – **1 балл**

Найдена начальная скорость Коли к п.1 – **1 балл**

Получен ряд (1) – **1 балл**

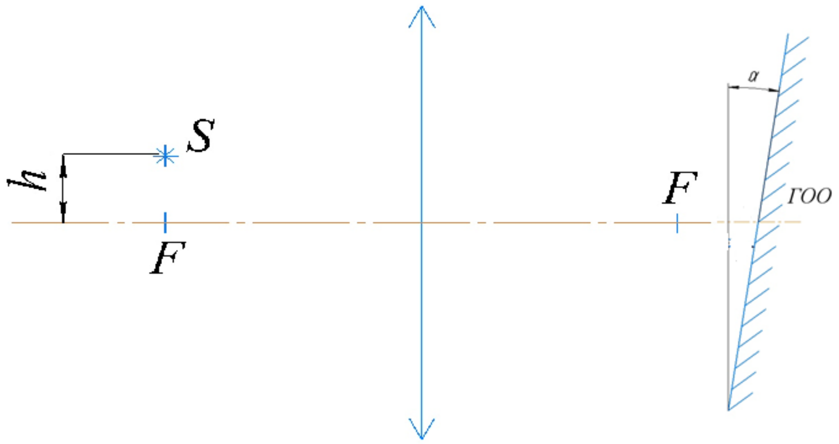
Получен ряд (2) – **3 балла**

Найдено расстояние между Петей и Колей – **4 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Наноробот-светлячок»

Специальный наноробот-светлячок (размеры робота порядка нанометров) находится в фокальной плоскости на малой высоте h над ГОО линзы. За линзой стоит зеркало, наклонённое под углом α к ГОО. Найдите высоту h, если изображение светлячка находится на высоте $\frac{h}{3}$ над ГОО, $\alpha = 0{,}001$ рад, F = 40 мм.

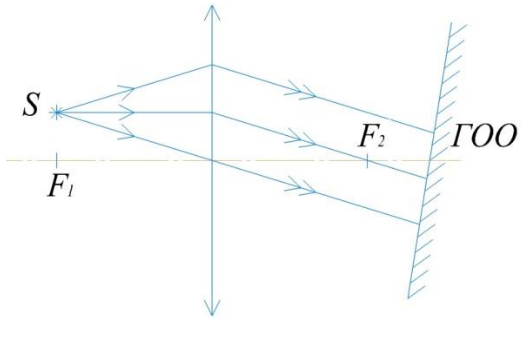


Возможное решение:

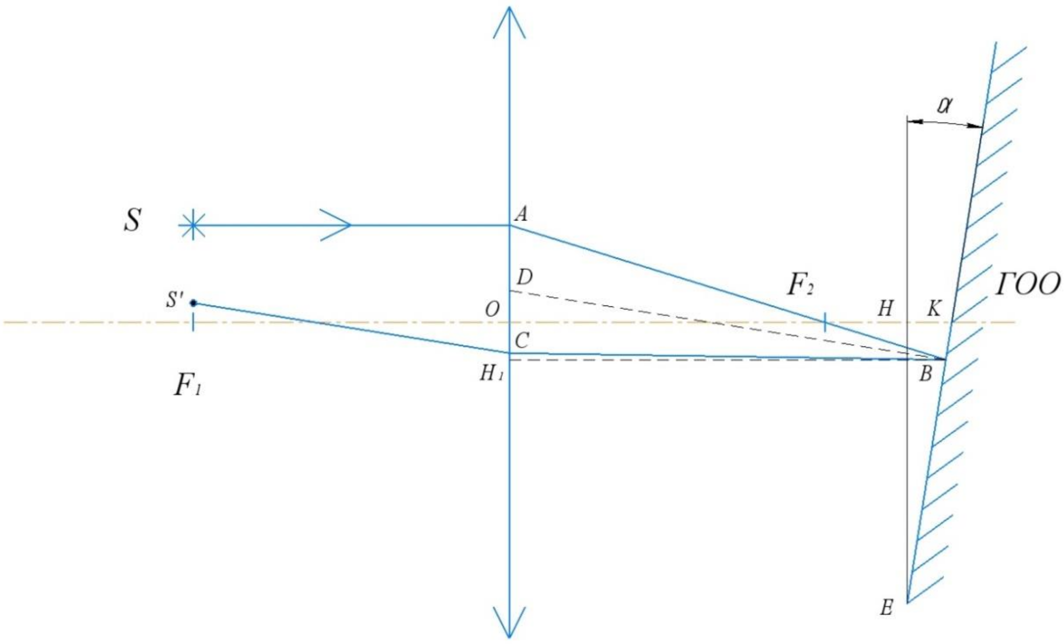
Поскольку наноробот-светлячок имеет размеры порядка нанометров, то мы можем считать его точечным источником света.

Построим ход лучей от светлячка к зеркалу. Очевидно, после прохождения линзы мы будем иметь параллельный пучок лучей, идущих под одним и тем же углом к ГОО. После отражения от зеркала по закону отражения все лучи так же будут друг другу параллельны, а следовательно, сойдутся тоже в фокальной плоскости линзы.

То есть, изображение светлячка будет прямо под ним на высоте $\frac{h}{3}$ над ГОО.



Чтобы рисунок не был сильно загромождён, рассмотрим один луч, идущий от светлячка, и построим его после преломления, затем отражения и снова преломления. Для удобства рассмотри луч, который, в конце концов, попадёт в изображение светлячка. Очевидно, если мы найдём угол, под которым этот луч идёт к ГОО, то мы найдём и угол между OS' и ГОО.



Пусть $\widehat{ASO} = \beta$, тогда по построению имеем:

$\widehat{ASO} = \widehat{AF_2O} = \widehat{KF_2B} = \beta$, $\widehat{BAC} = 90° - \beta$, $\widehat{DBE} = \widehat{EHK} = 90°$,$\widehat{HEK} = \alpha =>$

$$\widehat{HKB} = 90° - \alpha$$

Тогда $\widehat{F_2KB} = 90° - \beta + \alpha => \widehat{F_2DB} = \beta - \alpha$

Отсюда имеем, поскольку угол падения равен углу отражения:

$$\widehat{ABC} = 2\widehat{F_2DB} = 2(\beta - \alpha) => \widehat{ACB} = 90° - \beta + 2\alpha$$

Т.к. $\widehat{CH_1B} = 90°$, а $\widehat{H_1CB} = 90° + \beta - 2\alpha => \widehat{H_1BC} = -\beta + 2\alpha = \widehat{F_1OS'}$

Поскольку углы малые по условию (высота h мала) $=> tg(\alpha) \approx \alpha,\ tg(\beta) \approx \beta = \frac{h}{F}$ и $tg(2\alpha - \beta) \approx 2\alpha - \beta = \frac{h}{3F}$

Решая эту систему получим, что $h = \frac{3\alpha}{2}F = 0{,}06$ мм.

Система оценивания задачи:

Объяснено, почему светлячка можно считать точечным источником света – **1 балл**

Построен ход лучей и показано, где будет изображение светлячка – **2 балла**

Верно и полностью изображён ход одного луча от светлячка до его изображения – **2 балла**

Получено значение угла $\widehat{F_1OS'}$, выраженное через угол $\widehat{ASO}$ и α – **3 балла**

Сказано, что для малых углов α имеем $tg(\alpha) \approx \alpha$ – **1 балл**

Получено значение высоты h - **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «Исследование»

Петя решил исследовать расширение газа в необычном процессе. В специализированную установку он поместил некоторый объём водорода при температуре 300 К. В установке водород стал расширяться, причём давление от объёма зависело так: $p = \frac{k}{V^2}$, где k – постоянный коэффициент. Помогите Пете определить отведённое количество теплоты и конечную температуру водорода, если теплоёмкость во время всего процесса равнялась 4,15 Дж/К, а конечный объём вдвое больше начального.

Возможное решение:

$$V_1 = 2V_0$$

$$p = \frac{k}{V^2} => pV^2 = k = const => V_1^2 p_1 = V_0^2 p_0 => p_0 = 4p_1$$

Уравнение Клапейрона-Менделеева для двух состояний:

$p_0 V_0 = \nu R T_0$ (1)

$p_1 V_1 = \nu R T_1$ (2)

Поделим (2) на (1) и выразим T_1 через T_0:

$$T_1 = \frac{1}{2} T_0 = 150\text{К}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta T} => Q = C(T_1 - T_0) = 622{,}5 \text{ Дж}$$

Система оценивания задачи:

Получено соотношение давлений в начале и в конце – **2 балла**

Написано уравнение (1) – **2 балла**

Написано уравнение (2) – **2 балла**

Получена конечная температура – **2 балла**

Получено отведённое количество теплоты – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов