10 класс

Задача 10.1. Шайбы на столе.

На горизонтальном столе находятся две маленькие шайбы с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, связанные между собой невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый горизонтальный блок. Блок тянут с силой F (на рис. 10.1 изображён вид сверху). Определите ускорение блока в двух случаях: 1) $F = 10$ Н и 2) $F = 16$ Н. Коэффициент трения между шайбами и столом равен $\mu = 0{,}3$. Отрезки нити, соединяющие шайбы и блок, горизонтальны, параллельны друг другу и направлению силы F. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

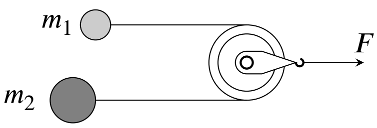

Рис. 10.1.

Ответ: 1) 1 м/с^2; 2) 3 м/с^2.

Решение: 1. Так как блок и нить невесомы, то сила натяжения нити, тянущая каждую шайбу, равна $F/2$. Максимальная сила трения между первой шайбой и столом равна $F_{\text{тр}1} = \mu m_1 g = 3$ Н, между второй шайбой и столом — $F_{\text{тр}2} = \mu m_2 g = 6$ Н.

Найдём связь между ускорениями шайб a_1 и a_2 и ускорением блока $a_{\text{бл}}$. Для этого перейдём в систему отсчёта блока. В ней шайбы должны двигаться с равными по величине, но противоположными по направлению ускорениями:

$$a_1 - a_{\text{бл}} = a_{\text{бл}} - a_2.$$

Отсюда получаем, что $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$.

2. В первом случае $F/2 = 5$ Н, что больше, чем $F_{\text{тр}1}$, но меньше, чем $F_{\text{тр}2}$. Это значит, что вторая шайба не сможет сдвинуться! Найдём ускорение первой шайбы:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 2\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2\ \text{м/с}^2.$$

Следовательно, в первом случаем $a_{\text{бл}} = a_1/2 = 1$ м/с^2.

3. Во втором случае $F/2 = 8$ Н, что превышает и $F_{\text{тр}1}$, и $F_{\text{тр}2}$. Найдём ускорения обоих грузов:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 5\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 5\ \text{м/с}^2,$$

$$m_2 a_2 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}2} = 2\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1\ \text{м/с}^2.$$

Поэтому, во втором случае $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2 = 3$ м/с^2.

Критерии:

1) Указано, что сила натяжения нити равна $F/2$ . . . . 1 балл
2) Обосновано, что в первом случае шайба m_2 не движется . . . . 2 балла
3) Найдено ускорение шайбы m_1 в первом случае . . . . 1 балл
4) Найдено ускорение блока в первом случае . . . . 1 балл
5) Найдены ускорения шайб во втором случае . . . . по 1 баллу за каждое (в сумме 2 балла)
6) Обосновано, что $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$ . . . . 2 балла
7) Найдено ускорение блока во втором случае . . . . 1 балл

Указания проверяющим: 1) В пункте 1 достаточно любого указания на то, что сила натяжения равна $F/2$.
2) Если нет обоснования формулы $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$, за пункт 6 баллы не ставить, а остальные пункты оценивать независимо.
3) Обоснование может быть произведено отличным от авторского способом, например, с помощью сравнения перемещений шайб и блока.

Задача 10.2. Дерево снизу.
Длинную тонкостенную трубку радиусом $r = 0{,}5$ см, закрытую снизу однородной круглой пластиной из дерева, аккуратно погружают в воду на глубину $h = 4$ см (рис. 10.2). Толщина пластины равна $d = 1$ см, её радиус $R = 3$ см. В трубку сверху аккуратно наливают керосин. При какой минимальной высоте керосина H пластина оторвётся от трубки? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность дерева $\rho_д = 600$ кг/м^3, плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м^3. Вода между трубкой и пластиной не проникает, жидкости в дерево не впитываются. Центр пластины лежит на оси трубки.

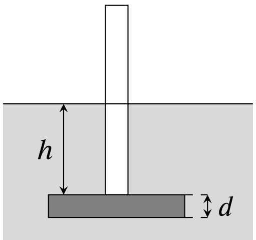

Рис. 10.2.

Ответ: 23 см.

Решение: На деревянную пластину действуют направленные вниз сила давления воды сверху, сила давления керосина и сила тяжести и направленная вверх сила давления воды снизу. Запишем условие равновесия пластины:

$$\rho_к g H \cdot \pi r^2 + \rho_в g h \cdot (\pi R^2 - \pi r^2) + mg = \rho_в g (h + d) \cdot \pi R^2.$$

Масса пластины равна $m = \rho_д d \cdot \pi R^2$. Подставляя её в условие равновесия и сокращая общие множители, получаем

$$\rho_к H r^2 + \rho_в h \cdot (R^2 - r^2) + \rho_д d R^2 = \rho_в (h + d) R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho_к H r^2 = (\rho_в - \rho_д) d R^2 + \rho_в h r^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{(\rho_в - \rho_д) d R^2 + \rho_в h r^2}{\rho_к r^2} = \frac{0{,}4\ \text{г/см}^3 \cdot 1\ \text{см} \cdot (3\ \text{см})^2 + 1\ \text{г/см}^3 \cdot 4\ \text{см} \cdot (0{,}5\ \text{см})^2}{0{,}8\ \text{г/см}^3 \cdot (0{,}5\ \text{см})^2} = 23\ \text{см}.$$

Критерии:
1) Записана формула для массы пластины $m = \rho_д d \cdot \pi R^2$ . . . . 1 балл
2) Записана формула для силы давления воды сверху $\rho_в g h \cdot (\pi R^2 - \pi r^2)$ . . . . 2 балла
3) Записана формула для силы давления воды снизу $\rho_в g (h + d) \cdot \pi R^2$ . . . . 2 балла
4) Записана формула для силы давления керосина $\rho_к g H \cdot \pi r^2$ . . . . 2 балла
5) Записано условие равновесия пластины . . . . 1 балл
6) Найдена высота слоя керосина H . . . . 2 балла

Указания проверяющим: Формулы из пунктов 1-4 могут быть сразу записаны в условие равновесия пластины. Если формулы приведены верно, соответствующие пункты оценивать полным баллом.

Задача 10.3. Новогодние эксперименты.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил подготовиться к Новому году и сделать праздничную гирлянду. Он взял источник постоянного напряжения, резистор сопротивлением R и большой набор одинаковых ламп, чьи сопротивления r не зависят от протекающего через них тока. Испытания показали, что при использовании в гирлянде только одной лампы, на ней выделяется мощность, равная 60 Вт. Если же использовать две лампы, то на них (в сумме) будет выделяться 97,2 Вт.

1. Чему равно отношение R/r?

2. Сколько ламп должно быть в гирлянде, чтобы их суммарная мощность снова была равна 60 Вт?

В гирлянде источник, резистор и лампы соединяются между собой последовательно. Источник считать идеальным.

Ответ: 1) $R/r = 8$; 2) 64.

Решение: Пусть U — напряжение на источнике. Если в гирлянде использовано N ламп, ток текущий в цепи равен $I = U/(R + Nr)$. Суммарная мощность, выделяющаяся на лампах, составляет

$$P_N = I^2 \cdot Nr = \frac{U^2 Nr}{(R + Nr)^2}.$$

По условию $P_1 = 60$ Вт, $P_2 = 97{,}2$ Вт, следовательно

$$\begin{cases} U^2 r/(R+r)^2 = 60 \text{ Вт}, \\ 2U^2 r/(R+2r)^2 = 97{,}2 \text{ Вт} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{2(R+r)^2}{(R+2r)^2} = \frac{97{,}2}{60} \quad \Rightarrow \quad \frac{R+r}{R+2r} = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad R = 8r.$$

Если $P_N = P_1$, то

$$\frac{U^2 Nr}{(R+Nr)^2} = \frac{U^2 r}{(R+r)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{U^2 Nr}{(8r+Nr)^2} = \frac{U^2 r}{(9r)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{(8+N)^2} = \frac{1}{81} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 81N = (N+8)^2 \quad \Rightarrow \quad N^2 - 65N + 64 = 0.$$

Решение этого уравнения, отличное от $N = 1$, есть $N = 64$.

Критерии:

1) Записано выражение для мощности одной лампы $U^2 r/(R + r)^2$ . . . . 1 балл
2) Записано выражение для мощности двух ламп $2U^2 r/(R + 2r)^2$ . . . . 1 балл
3) Найдено отношение R/r . . . . 3 балла
4) Записано уравнение $NU^2 r/(R + Nr)^2 = U^2 r/(R + r)^2$ . . . . 2 балла
5) Записано уравнение $N^2 - 65N + 64 = 0$ или аналог . . . . 2 балла
6) Найдено значение $N = 64$ . . . . 1 балл

Задача 10.4. В отрыв.

Тонкий однородный деревянный стержень, нижний конец которого упирается в дно сосуда, удерживается в положении, изображённом на рис. 10.3, с помощью вертикальной нити, привязанной к его верхнему концу. В сосуд медленно наливают воду. При какой толщине слоя воды h нижний конец стержня оторвётся ото дна? Точка крепления нити к стержню находится на высоте H относительно дна сосуда. Плотность дерева, из которого сделан стержень, равна 640 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3.

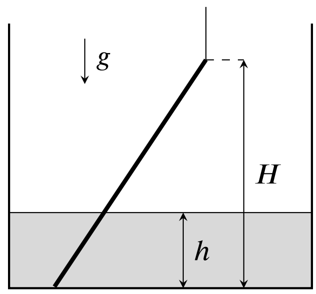

Рис. 10.3.

Ответ: $h = 2H/5$.

Решение: На стержень действуют (в общем случае) 4 силы: сила тяжести mg, где m — масса стержня, приложенная к его середине; сила Архимеда, приложенная с середине погруженной части; сила натяжения нити T и сила реакции со стороны дна N. Когда нижний конец стержня отрывается ото дна, $N = 0$. Запишем правило моментов относительно точки подвеса стержня (точки O):

$$mg \cdot \frac{H}{2} \operatorname{tg} \alpha = F_A \left(H - \frac{h}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha,$$

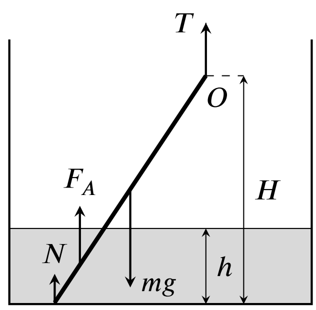

Рис. 10.4.

где α — угол между стержнем и вертикалью. Запишем выражения для массы стержня и силы Архимеда (S — площадь поперечного сечения):

$$m = \frac{\rho_д S H}{\cos \alpha}, \quad F_A = \frac{\rho_в g S h}{\cos \alpha}$$

и подставим их в правило моментов

$$\frac{\rho_д g S H^2}{2 \cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho_в g S h}{\cos \alpha} \cdot \left(H - \frac{h}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \rho_д H^2 = \rho_в h(2H - h) \quad \Rightarrow \quad 0{,}64 H^2 = h(2H - h).$$

Решая полученное уравнение, находим h

$$h^2 - 2hH + 0{,}64 H^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0{,}4H \text{ или } h = 1{,}6H.$$

Выбираем корень, который меньше H, и получаем $h = 0{,}4H$.

Критерии:

1) Корректно изображены силы, действующие на стержень . . . . 1 балл
2) Записано выражение для массы стержня . . . . 1 балл
3) Записано выражение силы Архимеда . . . . 1 балл
4) Записано правило моментов относительно точки O . . . . 3 балла
5) Записано уравнение $h^2 - 2hH + 0{,}64H^2 = 0$ или аналог . . . . 2 балла
6) Найдена высота h . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Если учащийся пишет правило моментов относительно какой-либо другой точки (не O), то для пункта 4 верно записанное правило моментов оценивается в 2 балла, а верно записанное условие равенства равнодействующей сил нулю (или второе правило моментов) — 1 баллом.

Задача 10.5. Тень от камня.

От основания вертикального фонаря высотой $H = 9{,}8$ м бросили камень со скоростью $v_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту (рис. 10.5). На какое максимальное расстояние от фонаря сместится тень камня во время его полёта, если других источников света в округе нет. Фонарь считать точечным источником, поверхность земли горизонтальной, а сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

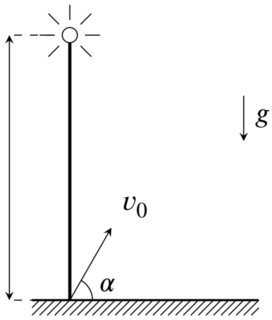

Рис. 10.5.

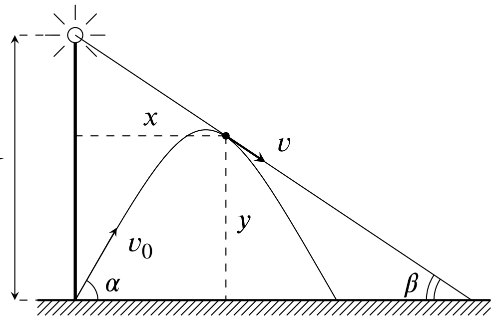

Рис. 10.6.

Ответ: 16,3 м.

Решение: Пусть L — искомое максимальное смещение тени. Тень от фонаря смещается на максимальное расстояние, когда соответствующий луч, идущий от фонаря, будет идти по касательной к траектории камня (см. рис. 10.6). Пусть t — время от момента броска, за которое камень оказался в точке касания. Тогда

$$x = v_0 t\cos\alpha, \qquad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Вектор скорости камня всегда направлен по касательной к траектории, следовательно он направлен вдоль луча, изображённого на рис. 10.6. Посчитаем тангенс угла наклона β этого луча к горизонту двумя способами:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H-y}{x} = \frac{|v_y|}{v_x} \quad\Rightarrow\quad \frac{H - v_0 t\sin\alpha + gt^2/2}{v_0 t\cos\alpha} = \frac{gt - v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad H = \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда получаем, что $t = \sqrt{2H/g} = 1{,}4$ с. Тангенс β, соответственно, равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{gt - v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} \approx \frac{14 - 10{,}4}{6} \approx 0{,}6.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{L} \quad\Rightarrow\quad L = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{9{,}8\text{ м}}{0{,}6} \approx 16{,}3\text{ м}.$$

Критерии:

1) Записаны законы движения камня $x(t)$ и $y(t)$ . . . . 0,5 балла
2) Записаны законы скорости камня $v_x(t)$ и $v_y(t)$ . . . . 0,5 балла
3) Указано, что максимальное смещение тени происходит при касании луча и траектории . . . . 2 балла
4) Записано уравнение $(H - y)/x = |v_y|/v_x$ или его аналог . . . . 3 балла
5) Найдено время в точке касания . . . . 2 балла
6) Найдено максимальное смещение камня L . . . . 2 балла

Указание проверяющим: 1) В пункте 4 должно быть приведено верное соотношение, связывающее скорость камня и координаты в точке касания луча и траектории.
2) В пункте 5 достаточно привести формулу для t, нахождение числового значения не является обязательным.

Максимально возможный балл в 10 классе 50