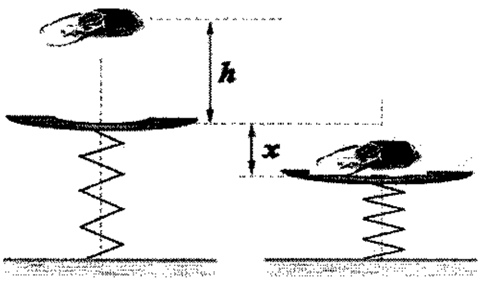
***Задача 1.* Жук голиаф.** Жук голиаф массой 100 г упал с высоты 16 см на липкую платформу, укрепленную на пружине жесткостью 200 Н/м. Найти амплитуду колебаний платформы с голиафом, если масса платформы равна массе жука. (Взаимодействие жука и платформы абсолютно неупругое, массой пружины пренебречь).

Возможное решение:

Дано: $m_1=m_2=100$ г
$k= 200$ Н/м
$h=16$ см



A - ?

Решение:

Импульс жука перед взаимодействием с платформой

$$P = \sqrt{2m_1E_к} = \sqrt{2m_1^2gh}$$

Кинетическая энергия жука и платформы сразу после взаимодействия:

$$E_{к2} = \frac{P^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1^2gh}{m_1+m_2}$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии:

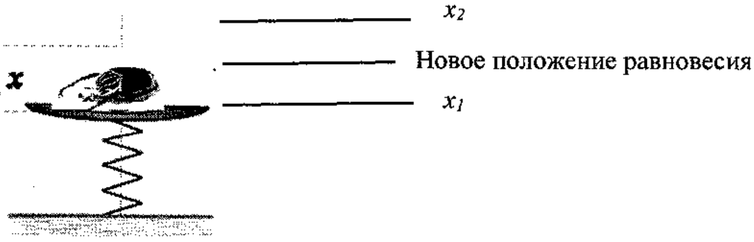
$$(m_1+m_2)gx - \frac{kx^2}{2} = -\frac{m_1^2gh}{m_1+m_2}$$

$$\frac{kx^2}{2} - (m_1+m_2)gx - \frac{m_1^2gh}{m_1+m_2} = 0$$

$$100x^2 - 2x - 0{,}08 = 0$$

$x_1=0{,}04$, $x_2= -0{,}02$,
$A=(x_1- x_2)/2=(0{,}04-(-0{,}02))/2=0{,}03$ м

Ответ: A=0,03 м =3см



Критерии оценивания:

Записан закон сохранения импульса	*2 балла*
Найдена кинетическая энергия после взаимодействия	*3 балла*
Получены корни квадратного уравнения	*2 балла*
Найдена амплитуда колебаний	*3 балла*
Максимальный балл	*10 баллов*

Задача 2.Вытащить или утопить? На поверхности большого водоема плавает деревянный кубик, частично погруженный в воду. Чтобы кубик полностью вытащить из воды нужно совершить минимальную работу A_1, а чтобы полностью погрузить в воду нужно совершить минимальную работу A_2, в четыре раза большую чем A_1. Найти плотность кубика.

Возможное решение.

Пусть a – ребро кубика, a_1 – глубина погружения, ρ_1 – плотность воды, ρ_2 – плотность кубика.

Условие плавания кубика:

$$F_{Apx} = mg \Rightarrow \rho_1 g V_1 = \rho_2 g V \Rightarrow \rho_1 g S a_1 = \rho_2 g S a \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{a_1}{a} = y \Rightarrow \rho_2 = y\rho_1 \; a_1 = ya$$

Поскольку речь идет о минимальной работе, то перемещают кубик, вынимая его из воды, **без ускорения**, на a_1, и на $(a - a_1)$, погружают в воду. Поэтому, внешняя сила равна по величине равнодействующей силы тяжести и силы Архимеда. Сила Архимеда равна $F_{Apx} = \rho_1 g V_1 = \rho_1 g S h = \rho_1 g a^2 x = kx$ и пропорциональна глубине погружения. Тогда её работа равна среднему арифметическому значений силы на концах интервала перемещения на длину интервала.

$$F = kx \quad A = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{kx_2^2 - kx_1^2}{2} = \frac{k(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{2} = \frac{(kx_2 + kx_1)\Delta x}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}\Delta x$$

Усреднять можно только тогда, когда производная функция линейно зависит от аргумента!

Работа при вынимании кубика из воды:

$$A_1 = (mg - F_{Apx})a_1 = \left(\rho_2 a^3 g - \frac{\rho_1 a^2 a_1 g + 0}{2}\right)a_1 = \left(y\rho_1 a^3 g - \frac{\rho_1 y a^3 g}{2}\right)ya = \frac{y^2 \rho_1 a^4 g}{2}$$

Работа при погружении кубика:

$$A_2 = (F_{Apx} - mg)(a - a_1) = \left(\frac{\rho_1 a^2 a_1 g + \rho_1 a^2 a g}{2} - \rho_2 a^3 g\right)(a - ya) = \left(\frac{\rho_1 a^3 g(y+1)}{2} - y\rho_1 a^3 g\right)a(1-y) =$$

$$= \rho_1 a^3 g\left(\frac{(y + 1 - 2y)}{2}\right)a(1-y) = \rho_1 a^4 g\frac{(1-y)^2}{2}$$

Их отношение

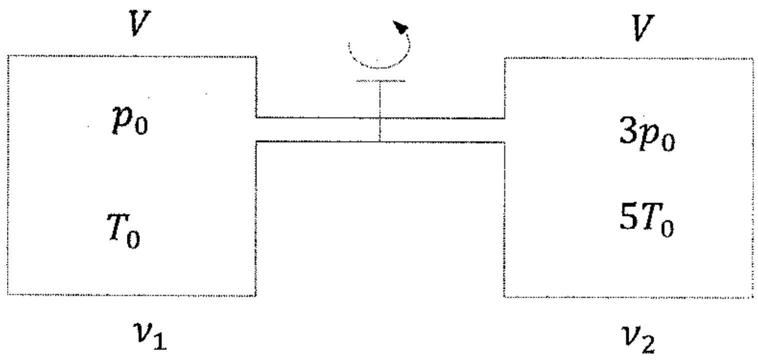
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 a^4 g \frac{(1-y)^2}{2}}{\frac{y^2 \rho_1 a^4 g}{2}} = \frac{(1-y)^2}{y^2} = \left(\frac{1-y}{y}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{1-y}{y} = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\rho_2 = \frac{1}{3}\rho_1 = 333,(3) кг/м^3$

Взаимосвязь между плотностью тела и глубиной погружения	*2 балла*
Усреднение силы Архимеда. Это олимпиада и дополнительные знания только приветствуем	*4 балла*
Расчет работы в первом случае	*2 балла*
Расчет работы во втором случае	*2 балла*

Задача 3. Два теплоизолированных сосуда одинакового объема, содержащие разные двухатомные идеальные газы, соединены тонкой трубкой с краном. Давление и температура в первом сосуде $p_0 = 10^5$ Па и $T_0 = 300\ K$, во втором – $3p_0$ и $5T_0$. Кран открывают и газы смешиваются. Определить давление p и температуру T смеси.

Решение:



До открытия крана, согласно уравнению Менделеева-Клапейрона,

$$p_0V = \nu_1 RT, \qquad 3p_0V = \nu_2 R \cdot 5T_0, \tag{1}$$

Откуда

$$\nu_1 = \frac{p_0V}{RT}, \qquad \nu_2 = \frac{3p_0V}{5RT_0}. \tag{2}$$

После открытия крана для смеси газов имеем:

$$p \cdot 2V = (\nu_1 + \nu_2)RT. \tag{3}$$

Так как после открытия крана газы не совершают работу над внешними телами ($A = 0$) и система теплоизолирована ($Q = 0$), то, согласно первому закону термодинамики, $\Delta U = 0$. Или:

$$\frac{5}{2}\nu_1 RT_0 + \frac{5}{2}\nu_2 R \cdot 5T_0 = \frac{5}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT. \tag{4}$$

Подстановка ν_1 и ν_2 из (2) в (3)-(4) приводит к результату

$$p = 2p_0 = 2 \cdot 10^5\ (\text{Па}),\ T = \frac{5}{2}T_0 = 750\ (\text{К}). \tag{5}$$

Ответ: $p = 2p_0 = 2 \cdot 10^5$ Па, $T = \frac{5}{2}T_0 = 750\ K$.

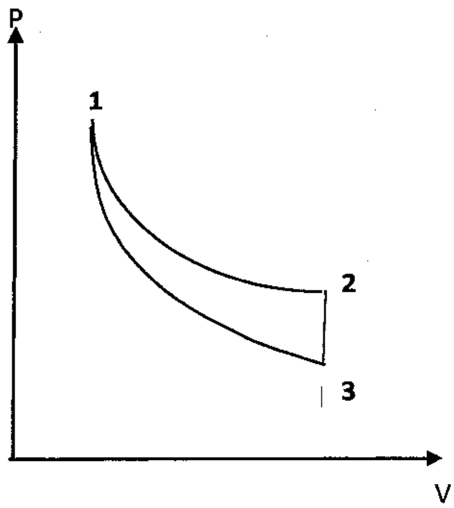
Критерии оценивания (10 баллов)

Записаны уравнения (1) и выражения (2)	*1 балла*
Записано уравнение (3)	*2 балла*
Обоснована неизменность внутренней энергии газов после открытия крана	*3 балла*
Записано уравнение (4)	*2 балла*
Получены правильные ответы задачи (5)	*2 балла*
Максимальный балл	*10 баллов*

Задача 4. 20 граммов атомарного водорода совершают замкнутый термодинамический цикл. Сначала газ изотермически расширяется, получив количество теплоты Q_1 =200 Дж, затем изохорно охлаждается, изменение внутренней энергии в процессе 2-3 $\Delta U_{23} = 100$ Дж. После этого он адиабатически сжимается до начального состояния. 1) В координатах P-V изобразить график цикла. 2) Найти термодинамический КПД этого цикла.

Решение:

Изобразим график цикла



1. При переходе из состояния 1 в состояние 2 газ изотермически расширяется и получает количество теплотыQ_1.
2. При переходе в состояние 3 газ изохорно охлаждается и отдаёт окружающей среде количество теплоты $Q_2 = \Delta U$
3. Переход из состояния 3 в состояние 1 происходит без теплообмена с окружающей средой.
4. Термодинамический коэффициент действия цикла рассчитывается по формуле $\eta = \frac{A}{Q_1} \cdot 100\%$

.

$A = Q_1 - Q_2$ –работа, совершаемая газом за цикл.

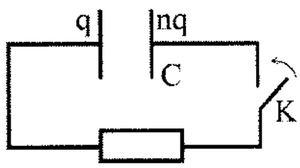
В нашем случае A=200-100 =100 Дж

Кпд $- \eta = \frac{100}{200} \cdot 100\% = 50\%$ Ответ: η= 50%

Критерии оценивания

Построен график цикла	*2 балла*
Записан первый закон термодинамики для процессов 1-2, 2-3 и 3-1	*4 балла*
Найдена работа газа за цикл	*2 балла*
Записано выражение для кпд цикла	*1 балл*
Получен верный ответ	*1 балл*
Максимальный балл	*10 баллов*

Задача 5. Заряды обкладок плоского конденсатора ёмкостью c равны q и nq, где n – любое число (см. рисунок). Какое количество теплоты Q выделится на резисторе после замыкания ключа K?



Решение:

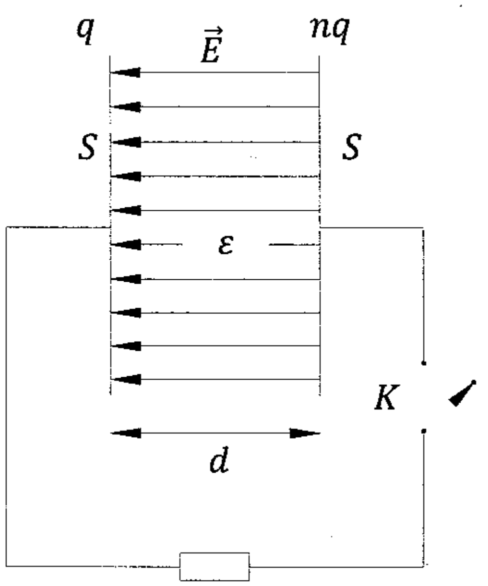


Рисунок 1

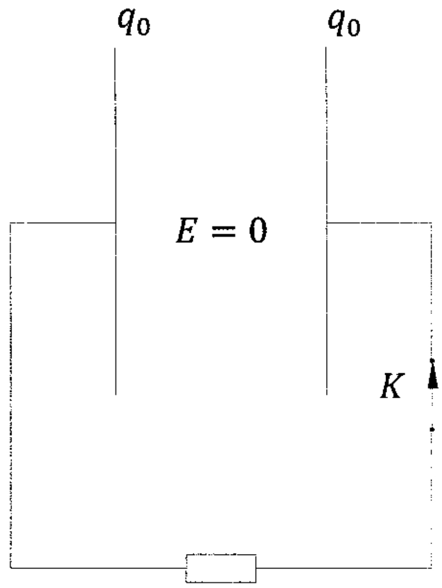


Рисунок 2

1. После замыкания ключа (рис.2) заряды обкладок станут одинаковыми ($q_0 = \frac{q}{2}(n+1)$), а напряженность поля между ними станет равной нулю:

$$\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

2. Так как суммарный заряд обкладок не изменился, то напряженность поля вне конденсатора <u>останется прежней</u>. Поэтому теплота Q, выделившаяся на резисторе, будет равна первоначальной энергии электрического поля между обкладками конденсатора (рис. 1).

3. Напряженность электрического поля между обкладками (рис. 1)

$$E = \frac{nq}{2S\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{q}{2S\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{2S\varepsilon_0\varepsilon}(n-1), \qquad (2)$$

а напряжение на конденсаторе

$$U = Ed = \frac{qd}{2S\varepsilon_0\varepsilon}(n-1). \qquad (3)$$

Так как ёмкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}, \qquad (4)$$

то выражение для напряжения U (3) можно записать как

$$U = \frac{q(n-1)}{2C}. \qquad (5)$$

При этом энергия конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{8C}(n-1)^2. \qquad (6)$$

4. Согласно п. 2, выделившаяся на резисторе теплота $Q = W$. Поэтому окончательно

$$Q = \frac{q^2}{8C}(n-1)^2. \qquad (7)$$

Ответ: $\boldsymbol{Q = \frac{q^2}{8C}(n-1)^2}$.

Критерии оценивания (10 баллов)

Обосновано отсутствие поля между обкладками после замыкания ключа (равенство(1))	*1 балл*
Обоснована неизменность напряженности поля вне конденсатора	*2 балла*
Сделан вывод о том, что искомая теплота Q равна первоначальной энергии конденсатора	*1 балл*
Найдены напряжённость поля E (2) и напряжение U (3)	*3 балла*
Использована формула (4) для ёмкости плоского конденсатора	*1 балл*
Получен правильный ответ задачи (выражение (6) или (7))	*2 балла*
Максимальный балл	*10 баллов*