11 класс

Задача 11.1. Половина на половину.

С вертикальной стены высотой H бросили в горизонтальном направлении камень (рис. 11.1). Наблюдатель, стоящий у подножия стены точно под точкой бросания, заметил, что камень приближался к нему в течение ровно половины времени своего полёта. Определите начальную скорость камня υ, его дальность полёта L и угол α, под которым камень упадёт на землю. Поверхность земли горизонтальна. Размерами наблюдателя и сопротивлением воздуха пренебречь.

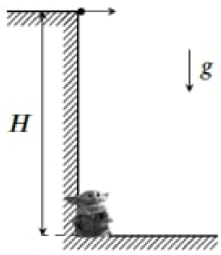

Рис. 11.1.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{3gH/4}$, $L = H\sqrt{3/2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{8/3} \approx 58{,}5°$.

Решение: *Способ №1.* Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя и запишем зависимость координат камня от времени

$$x(t) = \upsilon t, \qquad y(t) = H - gt^2/2.$$

Расстояние r от камня до наблюдателя находим с помощью теоремы Пифагора:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \upsilon^2 t^2 + \left(H - gt^2/2\right)^2 \quad\Rightarrow\quad r^2 = H^2 + (\upsilon^2 - gH)t^2 + g^2t^4/4.$$

Найдём точку максимума расстояния $t_m \neq 0$:

$$(r^2)' = 0 \quad\Rightarrow\quad 2t_m(\upsilon^2 - gH) + g^2t_m^3 = 0 \quad\Rightarrow\quad t_m^2 = 2(gH - \upsilon^2)/g^2.$$

С другой стороны, по условию $t_m = 1/2 \cdot t_{\text{полёта}} = 1/2 \cdot \sqrt{2H/g}$. Отсюда

$$\frac{2(gH - \upsilon^2)}{g^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2H}{g} \quad\Rightarrow\quad 4(gH - \upsilon^2) = gH \quad\Rightarrow\quad \upsilon = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Дальность полёта равна

$$L = \upsilon\, t_{\text{полёта}} = \sqrt{3gH/4}\cdot\sqrt{2H/g} = H\sqrt{3/2}.$$

Угол с горизонтом, под которым упадёт камень — угол между вектором скорости и поверхностью земли:

$$\operatorname{tg}\alpha = gt_{\text{полёта}}/\upsilon = \sqrt{8/3} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 58{,}5°.$$

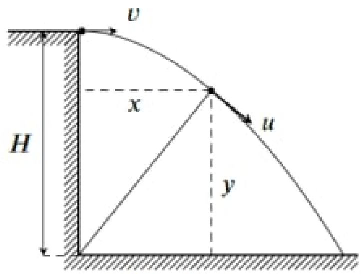

Рис. 11.2.

Способ №2. Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя. Вектор скорости камня u в точке максимального удаления перпендикулярен радиус-вектору этой точки (рис. 11.2). Время, за которое камень попадёт в эту точку, равно половине времени полёта $t_m = \frac{1}{2}t_{\text{полёта}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Так как вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору, то

$$\frac{y}{x} = \frac{u_x}{|u_y|} \quad\Rightarrow\quad \frac{H - gt_m^2/2}{\upsilon t_m} = \frac{\upsilon}{gt_m} \quad\Rightarrow\quad \upsilon^2 = g\left(H - \frac{gt_m^2}{2}\right) = \frac{3gH}{4} \quad\Rightarrow\quad \upsilon = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Нахождение L и α аналогично Способу №1.

Критерии (для способа №1):

1) Записан закон изменения расстояния от наблюдателя $r(t)$ . . . . . 2 балла
2) Записана формула для t_m . . . . . 1 балл
3) Найдена точка максимума $r(t)$ . . . . . 2 балла
4) Найдена начальная скорость υ . . . . . 2 балла
5) Найдено выражение для L . . . . . 2 балла
6) Найдено значение α . . . . . 1 балл

Критерии (для способа №2):

1) Указано, что в точке максимального удаления радиус-вектор перпендикулярен скорости . . . . . 1 балл
2) Записана формула для t_m . . . . . 1 балл
3) Записано условие $y/x = u_x/|u_y|$ или аналог . . . . . 3 балла
4) Найдена начальная скорость υ . . . . . 2 балла
5) Найдено выражение для L . . . . . 2 балла
6) Найдено значение α . . . . . 1 балл

Указание проверяющим: В пункте 6 ответ в виде $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{8/3}$ (или аналогичный) засчитывать как верный и оценивать полным баллом.

Задача 11.2. Цепь с конденсатором.

Определите установившийся заряд конденсатора в цепи, изображённой на рис. 11.3, если $\mathscr{E}_1 = 1$ В, $\mathscr{E}_2 = 3$ В, $\mathscr{E}_3 = 8$ В, $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 4$ Ом, $C = 3300$ мкФ. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь.

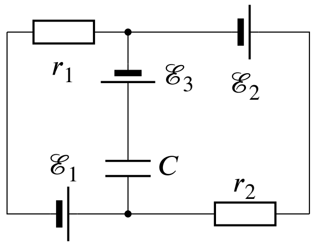

Рис. 11.3.

Ответ: 0,019 Кл.

Решение: В установившемся режиме ток в цепи конденсатора не течёт. Пусть I — ток, текущий во внешнем контуре (направление — по часовой стрелке). Тогда

$$I(r_1 + r_2) = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{r_1 + r_2} = \frac{2\text{ В}}{10\text{ Ом}} = 0{,}2\text{ А}.$$

Запишем 2ое правило Кирхгофа для, например, левого контура (направление обхода — по часовой стрелке):

$$U_C + Ir_1 = \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1$$

и найдём напряжение на конденсаторе

$$U_C = \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1 - Ir_1 = 8\text{ В} - 1\text{ В} - 0{,}2\text{ А} \cdot 6\text{ Ом} = 5{,}8\text{ В}.$$

Заряд на этом конденсаторе равен

$$q = CU_C = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\text{ Ф} \cdot 5{,}8\text{ В} \approx 0{,}019\text{ Кл}.$$

Критерии:

1) Найден ток во внешнем контуре . . . . 4 балла
2) Найдено напряжение на конденсаторе . . . . 4 балла
3) Вычислен заряд на конденсаторе . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Напряжение на конденсаторе (и, как следствие, заряд) могут быть приведены с противоположным знаком. На выставляемый балл это не влияет.
2) Приводить числовые значения в пунктах 1 и 2 необязательно, достаточно верных формул.

Задача 11.3. Стержень на опоре.

Тонкий однородный стержень длиной $L = 60$ см лежит на вертикальной опоре высотой $h = 30$ см, своим левым концом упираясь в горизонтальную поверхность стола (рис. 11.4). При каком наименьшем коэффициенте трения μ между стержнем и столом стержень будет находиться в равновесии, если точка его касания с поверхностью стола расположена на расстоянии $s = 40$ см от опоры? Трения между опорой и стержнем нет, толщиной опоры пренебречь.

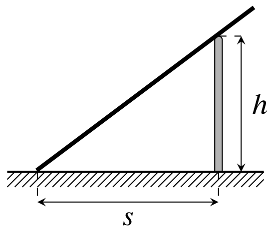

Рис. 11.4.

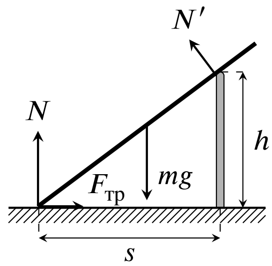

Рис. 11.5.

Ответ: $\mu = 36/77 \approx 0{,}47$.

Решение: Пусть m — масса стержня, а α — угол между стержнем и поверхностью стола. Из данных в условии задачи находим, что $\sin\alpha = 3/5$ и $\cos\alpha = 4/5$. Изобразим силы, действующие на стержень (рис. 11.5) и запишем условия равенства равнодействующей всех сил нулю:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = N' \sin\alpha, \\ N + N' \cos\alpha = mg \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{\text{тр}} = 3N'/5, \\ N + 4N'/5 = mg \end{cases}$$

и правило моментов относительно точки упора стержня в стол

$$N' \sqrt{s^2 + h^2} = mg \cdot \frac{L\cos\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad N' \cdot 50 \text{ см} = mg \cdot 24 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad N' = \frac{12mg}{25}.$$

Выразим силу трения и силу реакции N через mg:

$$N + \frac{4}{5} \cdot \frac{12mg}{25} = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{77mg}{125},$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12mg}{25} = \frac{36mg}{125}.$$

Если коэффициент трения минимален, то $F_{\text{тр}} = \mu N$. Отсюда находим, что

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{36}{77} \approx 0{,}47.$$

Критерии:

1) Корректно изображены силы, действующие на стержень . . . . 1 балл
2) Записана формула $F_{\text{тр}} = \mu N$ . . . . 1 балл
3) Записано условие равенства сил в проекции на 2 оси . . . . 4 балла (по 2 балла за проекцию)
4) Записано правило моментов . . . . 2 балла
5) Найдено значение μ . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Сила трения может быть сразу записана как $F_{\text{тр}} = \mu N$ в уравнениях из пунктов 3 и 4. В этом случае балл за пункт 2 выставляется.
2) Ответ зачитывать как в виде десятичной дроби, так и в виде обыкновенной.
3) Учащийся может в пункте 3 вместо одного или обоих равенств записать правило моментов относительно одной (или двух) точек, отличных от взятой в пункте 4. В этом случае каждое корректное и **независимое** уравнение оценивается 2 баллами (но не более 4 баллов за пункт).

Задача 11.4. Блок с пружинами.

В системе, изображённой на рис. 11.6, обе пружины горизонтальны, своим левым концом прикреплены к стене, а их правые концы соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Жёсткость одной пружины равна k, другой — $2k$, и в начальный момент они не деформированы. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно переместить блок вправо на расстояние x? Пружины считать невесомыми, а нить — невесомой и нерастяжимой. Трение между нитью и блоком отсутствует.

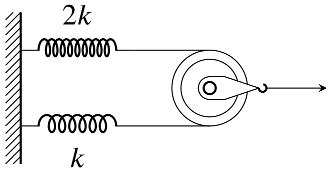

Рис. 11.6.

Ответ: $A = 4kx^2/3$.

Решение: Пусть при перемещении оси блока на x длина верхней пружины увеличивается на x_1, а нижней — на x_2. Так как пружины связаны между собой невесомой нитью, силы их натяжения равны:

$$2kx_1 = kx_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1.$$

Из-за движения блока суммарная длина пружин увеличивается на $2x$:

$$x_1 + x_2 = 2x \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 2x \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2x}{3},\ x_2 = \frac{4x}{3}.$$

Работа по перемещению блока на x равна изменению потенциальной энергии пружин:

$$A = \frac{2kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{4kx^2}{9} + \frac{8kx^2}{9} = \frac{4kx^2}{3}.$$

Критерии:

1) Получена связь между удлинениями пружин . . . . 2 балла
2) Записано соотношение $x_1 + x_2 = 2x$ или его аналог . . . . 3 балла
3) Найдены удлинения обеих пружин $x_1 = 2x/3$, $x_2 = 4x/3$ . . . . 2 балла
4) Записана формула для работы через x_1 и x_2 . . . . 1 балл
5) Найдено выражение для работы $A = 4kx^2/3$ . . . . 2 балла

Задача 11.5. Утечка в сосуде.

Герметичный сосуд состоит из двух горизонтальных цилиндрических частей разного сечения, перекрытых двумя поршнями, соединёнными между собой жёстким стержнем. Начальное положение поршней и размеры показаны на рис. 11.7. Между торцами сосуда и ближайшими поршнями находится азот, причём давление газа слева в 1,2 раза выше, чем справа. Снаружи сосуда и между поршнями — вакуум. В некоторый момент в левом торце сосуда появилась микротрещина, и газ стал медленно выходить наружу. Когда из левой части сосуда вышло 4/9 находившегося там азота, поршни начали смещаться. Насколько они сместятся, если оттуда выйдет ещё такое же количество газа? Длина стержня больше L. Считать, что температура азота в обеих частях сосуда одинакова и остаётся постоянной в течение всего процесса. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует.

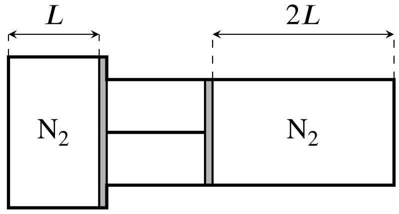

Рис. 11.7.

Ответ: $8L/11$.

Решение: Пусть p_0 — давление азота в правой части сосуда. Тогда $6p_0/5$ — давление в левой части. Когда оттуда выйдет 4/9 от первоначального количества газа ν, давление азота в левой части упадёт до

$$p_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{6p_0}{5} = \frac{2p_0}{3}.$$

Поршни начнут смещаться тогда, когда **сила** давления газа на левый поршень сравняется с силой давления газа на правый. Если S_1 и S_2 — площади левого и правого поршней, то

$$p_1 S_1 = p_0 S_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2p_0 S_1}{3} = p_0 S_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}.$$

Когда из левой части выйдет ещё $4\nu/9$ газа, поршень сдвинется влево на расстояние x. Обозначим p_1' и p_2' новые давления в левой и правой частях сосуда. Запишем закон Менделеева-Клапейрона для обеих частей:

$$\begin{cases} p_1' S_1 (L - x) = \frac{1}{9}\nu RT, \\ \frac{6}{5} p_0 S_1 L = \nu RT \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_1'(L - x) = \frac{2}{15} p_0 L \qquad \text{(левая часть)},$$

$$p_2'(2L + x) = p_0 \cdot 2L \qquad \text{(правая часть)}.$$

Так как $p_1' S_1 = p_2' S_2$, то $p_2' = 3p_1'/2$. Отсюда

$$\begin{cases} p_1'(L - x) = \frac{2}{15} p_0 L, \\ \frac{3}{2} p_1'(2L + x) = p_0 \cdot 2L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_1'(L - x) = \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{2} p_1'(2L + x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 10(L - x) = 2L + x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8L}{11}.$$

Критерии:

1) Найдено давление в левом сосуде после первой утечки . . . . 1 балл
2) Найдено отношение площадей поршней . . . . 2 балла
3) Записан закон Бойля-Мариотта для правого сосуда (после второй утечки) . . . . 2 балла
4) Получено уравнение $p_1'(L - x) = 2/15 \cdot p_0 L$ или его аналог . . . . 3 балла
5) Найдено смещение поршня x . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 11 классе 50