

7 класс

Задача 7.1. На пробежке.

Экспериментатор Иннокентий Иванов вышел с утра на пробежку. Неспеша пробегая по дорожке в парке, он встретил движущуюся навстречу колонну из 10 бегунов. Учёный заметил, что спортсмены пробегают мимо него с интервалом в 2 с. Через некоторое время эта же самая колонна, где-то развернувшись, стала обгонять Иннокентия. В этот раз все спортсмены пробежали мимо учёного в течение 42 с.

1. Каково было расстояние между соседними бегунами в колонне?

2. С какой скоростью бежал Иннокентий по парку, если считать, что она не менялась?

Пообщавшись со спортсменами, учёный выяснил, что скорость их бега всегда равна 18 км/ч, а расстояние между ними в колонне всегда постоянно.

Ответ: 1) 14 м; 2) 2 м/с.

Решение: Пусть v — скорость Иннокентия, L — расстояние между бегунами, а $u = 18 \text{ км/ч} = 5 \text{ м/с}$ — скорость бега спортсменов. Длина всей колонны, соответственно, равна $9L$. Так как при движении колонны навстречу бегуны пробегают мимо учёного с интервалом 2 с,

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с.}$$

При второй встрече спортсмены пробежали мимо Иннокентия за 42 с, поэтому

$$9L = (u - v) \cdot 42 \text{ с.}$$

Поделим эти уравнения друг на друга и выразим скорость учёного:

$$9 = \frac{42}{2} \cdot \frac{u - v}{v + u} \Rightarrow 9(v + u) = 21(u - v) \Rightarrow 30v = 12u \Rightarrow v = \frac{2u}{5} = 2 \text{ м/с.}$$

Расстояние между бегунами в колонне равно

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с} = 7 \text{ м/с} \cdot 2 \text{ с} = 14 \text{ м.}$$

Критерии:

- 1) Записана формула $L = (v + u) \cdot 2 \text{ с}$ или её аналог 2 балла
- 2) Записана формула $9L = (u - v) \cdot 42 \text{ с}$ или её аналог 3 балла
- 3) Найдена скорость Иннокентия v 3 балла
- 4) Найдено расстояние между бегунами L 2 балла

Указание проверяющим: Если участник записал длину колонны как $10L$ и произвёл верный расчёт v и/или L в этом случае, то за пункт 2 баллы не ставятся, а пункты 3 и 4 оцениваются независимо. Для контроля, при длине в $10L$ должно получаться $v \approx 1,8 \text{ м/с}$ и $L \approx 13,5 \text{ м}$.

Задача 7.2. Бабушкин подарок.

Однажды бабушка прислала Карлсону три банки варенья — две больших (одинаковых между собой) и одну маленькую (вдвое меньшего объёма). Пригласив в гости Малыша, Карлсон решил съесть подарок, дав гостю маленькую банку, а себе оставив обе большие. Варенье из своей банки Малыш первую треть времени ел со скоростью 4 ложки в минуту, оставшееся время — со скоростью 2,5 ложки в минуту. С какой скоростью Карлсон поглощал содержимое второй большой банки, если первую банку он съел со скоростью 10 ложек в минуту, а начали и закончили друзья в одно и то же время? Количество варенья в каждой ложке у обоих друзей считать одинаковым.

Ответ: 15 ложек в минуту.

Решение: Пусть V — ёмкость третьей банки (банки Малыша) в ложках, а t — время, в течение которого варенье было съедено. Тогда

$$V = 4 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{t}{3} + 2,5 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{2t}{3} = 3 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot t.$$

Ёмкость обеих банок Карлсона равна $2V$. Время, за которое он съел содержимое первой, равно

$$t_1 = \frac{2V}{10 \text{ лож/мин}} = \frac{2 \cdot 3 \text{ лож/мин} \cdot t}{10 \text{ лож/мин}} = 0,6t.$$

Следовательно, на вторую банку ушло время, равное

$$t_2 = t - t_1 = 0,4t.$$

Так как время уменьшилось в 1,5 раза при том же объёме варенья, скорость поедания Карлсоном второй банки равна $1,5 \times 10 \text{ лож/мин} = 15 \text{ лож/мин}$.

Критерии:

- 1) Записано выражение для объёма, съеденного Малышом, через доли времени (или его аналог) 3 балла
- 2) Записано выражение для времени t_1 через V и скорость (либо аналогичное равенство) 2 балла
- 3) Найдено время t_1 , выраженное через t (либо аналогичное равенство) 2 балла
- 4) Найдено время t_2 1 балл
- 5) Найдена скорость поедания второй банки Карлсоном 2 балла

Указание проверяющим: Все величины не обязательно могут быть выражены через общее время t (как в авторском решении), его роль в решении учащегося может играть другой параметр. В пунктах 1 и 3 критериев, в этом случае, необходимо заменить t на параметр, использованный учащимся.

Задача 7.3. Угощение для брата.

Пока семиклассника Паши не было дома, его младшая сестра Ариша решила сделать брату сюрприз и слепила из пластилина два пирожных, совершенно **одинаковых по размеру**, но с разными «начинками». В одно из них она положила два стальных, а в другое — три стеклянных шарика. Узнав об этом, Паша взвесил оба пирожных и выяснил, что их массы равны 30 г и 47 г.

1. Чему равна плотность пластилина, который использовала Ариша?
2. Каков объём одного пирожного?

Паша помнил, что размеры всех шариков одинаковы, а масса стального шарика равна 13 г. Плотность стали равна 7800 кг/м^3 , плотность стекла — 2400 кг/м^3 .

Ответ: 1) 1800 кг/м^3 ; 2) 15 см^3 .

Решение: Два стальных шарика тяжелее, чем три стеклянных того же объёма, поэтому пирожное со стальной «начинкой» имеет массу 47 г, а со стеклянной — 30 г.

Два стальных шарика имеют массу 26 г, следовательно, оставшийся 21 г приходится на пластилин. Запишем выражение для объёма пирожного:

$$V = \frac{26 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} + \frac{21 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}}$$

Масса стеклянного шарика равна

$$m_{\text{стек}} = \frac{13 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} \cdot 2,4 \text{ г/см}^3 = 4 \text{ г}.$$

Поэтому во втором пирожном масса пластилина составляет $30 \text{ г} - 3 \cdot 4 \text{ г} = 18 \text{ г}$. Объём такого пирожного равен

$$V = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}}$$

Приравнивая, получаем

$$\frac{26 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} + \frac{21 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}} = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}} \Rightarrow \rho_{\text{пл}} = 1,8 \text{ г/см}^3.$$

Объём пирожного, соответственно, будет равен

$$V = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{1,8 \text{ г/см}^3} = 15 \text{ см}^3.$$

Критерии:

- | | |
|---|---------|
| 1) Найдена масса стеклянного шарика | 1 балл |
| 2) Найдена масса пластилина в обоих случаях | 2 балла |
| 3) Записано верное уравнение для нахождения $\rho_{\text{пл}}$ (или V) | 3 балла |
| 4) Найдено значение плотности пластилина $\rho_{\text{пл}}$ | 2 балла |
| 5) Найдено значение объёма пирожного V | 2 балла |

Задача 7.4. Дальномер.

На выходных учёный Лосяш решил поэкспериментировать. Для этого он взял сосуд с вертикальными стенками, налил туда воду и поместил на некотором расстоянии от её поверхности вертикальный цилиндр. На поверхности цилиндра Лосяш закрепил электронный дальномер, который определяет расстояние h до поверхности воды (схема установки изображена на рис. 7.1а). Учёный стал медленно и с постоянной скоростью опускать цилиндр до тех пор, пока тот не упёрся в дно сосуда. Снимая показания дальномера, Лосяш получил график зависимости h от времени (рис. 7.1б). Определите **по графику**:

1. высоту слоя воды H и расстояние l от её поверхности до верхнего края сосуда в начале эксперимента;
2. отношение площади дна сосуда к площади сечения поршня.

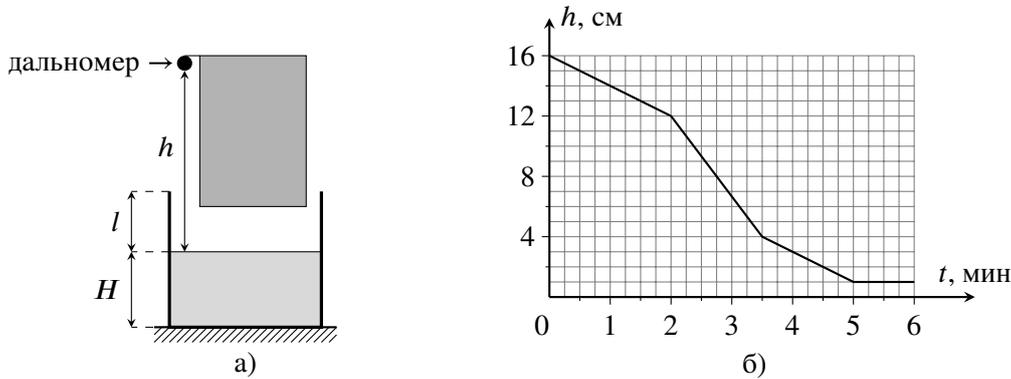


Рис. 7.1.

Ответ: 1) $H = 6$ см, $l = 5$ см; 2) 1,6.

Решение: Первый участок графика соответствует движению поршня до контакта с водой. Найдём скорость движения поршня: $v = (16 \text{ см} - 12 \text{ см}) / (2 \text{ мин}) = 2 \text{ см/мин}$. Второй участок соответствует движению поршня в воде, когда уровень вытесняемой воды поднимается вверх. На третьем участке скорость снова равна v , значит здесь уровень воды достиг края сосуда, и вытесняемая жидкость просто выливается наружу. Четвёртый (горизонтальный) участок показывает, что в этом случае поршень дошёл до дна сосуда и остановился.

От момента касания поверхности воды до контакта с дном поршень двигался в течение $5 \text{ мин} - 2 \text{ мин} = 3 \text{ мин}$. Поэтому начальная высота слоя воды в сосуде равна $H = v \cdot 3 \text{ мин} = 2 \text{ см/мин} \cdot 3 \text{ мин} = 6 \text{ см}$. Высота дальномера над нижним краем поршня равна значению h в момент касания воды (при $t = 2 \text{ мин}$), то есть эта высота составляет 12 см. Когда поршень упёрся в дно сосуда, $h = 1 \text{ см}$, а уровень воды совпадает с верхним краем сосуда. Следовательно, вся высота сосуда равна $12 \text{ см} - 1 \text{ см} = 11 \text{ см}$. Расстояние l от начального положения поверхности жидкости до края сосуда составляет $l = 11 \text{ см} - H = 11 \text{ см} - 6 \text{ см} = 5 \text{ см}$.

Пусть S_1 — площадь сечения поршня, а S_2 — площадь дна сосуда. Поднятие воды до краёв происходит за $3,5 \text{ мин} - 2 \text{ мин} = 1,5 \text{ мин}$. Опустившийся поршень вытесняет объём $V = S_1 \cdot v \cdot 1,5 \text{ мин} = 3 \text{ см} \cdot S_1$. Он же заполняет пространство вокруг поршня до краёв сосуда, $V = (S_2 - S_1)l = 5 \text{ см} \cdot (S_2 - S_1)$. Приравнявая, получаем

$$3 \text{ см} \cdot S_1 = 5 \text{ см} \cdot (S_2 - S_1) \Rightarrow S_2/S_1 = 8/5 = 1,6.$$

Критерии:

- | | |
|---|---------|
| 1) Найдена скорость опускания поршня | 2 балла |
| 2) Найдена начальная высота воды H | 2 балла |
| 3) Найдена расстояние l | 2 балла |
| 4) Записано верное уравнение, связывающее S_1 и S_2 | 3 балла |
| 5) Найдено отношение площадей | 1 балл |

Указание проверяющим: 1) В пункте 4 уравнение также может быть получено, например, путём нахождения скорости сближения жидкости и датчика (по второму участку графика и теоретически). Найденное уравнение, если оно верно, оценивать полным баллом за п.4.

2) В пункте 5 допустимо нахождение учащимся обратного отношения площадей $S_1/S_2 = 5/8$. Балл за это не снимать.

3) Расчёты, основанные на измерениях, проделанных по рис. 7.1а (не по графику), не оценивать!