1. «Челночный бег»

В школьных соревнованиях по челночному бегу участвовали Костя и Миша.

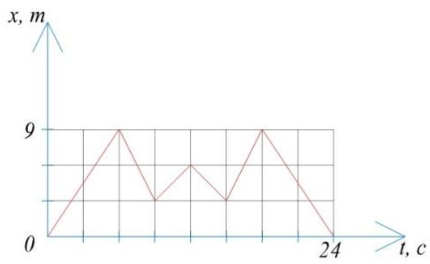
График зависимости координаты от времени каждого юноши показан на рисунках.

1) Постройте график зависимости проекции скорости от времени для каждого юноши.

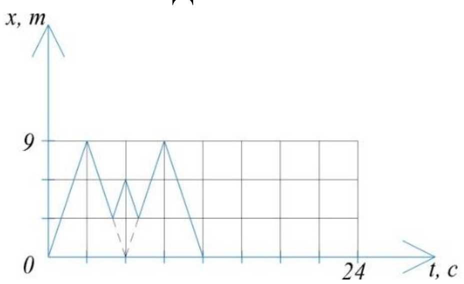
2) Насколько ближе к окончанию забега Костя по сравнению с Мишей к исходу второй секунды?

3) С какой скоростью должен был бы двигаться Миша на участке от шестой до девятой секунды, если бы он, в среднем, бежал так же, как Костя?

Для Миши

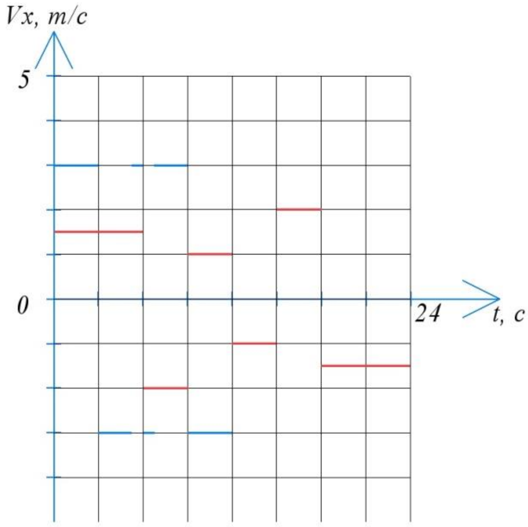


Для Кости



Возможное решение:

Поскольку на всех участках обоих графиков имеем линейную зависимость => движение равномерное и прямолинейное, а скорость на каждом участке постоянна, найти её можно из графика. Тогда получаем:



Синим обозначена проекция скорости Кости, красным – Миши.

Путь, пройденные каждым юношей есть площадь под графиком скорости от времени.

$S_к = 27$ м; $S_м = 15$ м; $S_к - S_м = 12$ м

$v_{ср} = \frac{S_0}{t_0}$, где S_0 – весь путь, t_0 – всё время.

$v_{срК} = 3\frac{м}{с}$; $v_{срМ} = 1{,}5\frac{м}{с}$ =>средняя скорость Миши будет выше в два раза.

Значит, каждый участок пути Миша должен будет проходить вдвое быстрее.

Поскольку скорость была равна по модулю $2\frac{м}{с}$ =>новая скорость по модулю будет равна $4\frac{м}{с}$.

Система оценивания задачи:

Указано, что на каждом участке Миша и Костя двигались равномерно и прямолинейно – **1 балл**

Построен график из п.1 – **2 балла**

Посчитан путь, пройденный Костей за первые 9 секунд – **1 балл**

Посчитан путь, пройденный Мишей за первые 9 секунд – **1 балл**

Найдена разность путей Миши и Кости за первые 9 секунд – **1 балл**

Дано определение средней путевой скорости – **1 балл**

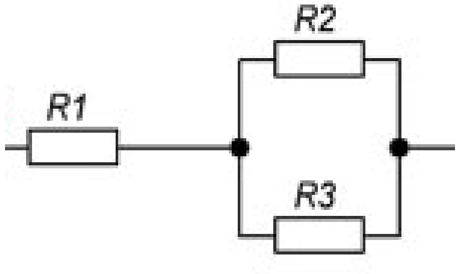
Сосчитана средняя путевая скорость Кости – **1 балл**

Сосчитана средняя путевая скорость Миши – **1 балл**

Показано, что Миша должен двигаться вдвое быстрее на участке от шестой до девятой секунды, чтобы, в среднем, бежать так же, как Костя – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «От перемены мест сумма меняется»
Общее сопротивление участка цепи, изображённого на рисунке, равно 20 Ом.
Если поменять местами резисторы 1 и 3, сопротивление увеличится на 0,4%. Если поменять местами 1 и 2, то сопротивление схемы станет в 10 раз больше первоначального. Определите сопротивление резисторов 1,2 и 3.



Возможное решение:
Из условия следует три возможных смешанных соединения, суммарное сопротивление которого можно сосчитать следующим образом:

$$R_{01} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3} => R_{01} = 20 \text{ Ом} \quad (1)$$

$$R_{02} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} => R_{02} = 200 \text{ Ом} \quad (2)$$

$$R_{03} = R_3 + \frac{R_2 R_1}{R_2+R_1} => R_{03} = 20{,}08 \text{ Ом} \quad (3)$$

Приведём к общему знаменателю и заметим, что числитель во всех трёх уравнениях одинаков.

$$\frac{R_1R_3+R_2R_3+R_2R_1}{R_2+R_3} = 20 \text{ Ом} \quad (4)$$

$$\frac{R_1R_3+R_2R_3+R_2R_1}{R_1+R_3} = 200 \text{ Ом} \quad (5)$$

$$\frac{R_1R_3+R_2R_3+R_2R_1}{R_2+R_1} = 20{,}08 \text{ Ом} \quad (6)$$

Поделим (4) на (5) и (4) на (6), получим систему:

$$\begin{cases} \frac{R_2+R_3}{R_1+R_3} = 10 \\ \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2} = 1{,}004 \end{cases} \quad (7)$$

Домножим на знаменатель и выразим, к примеру, R_2 и R_3 через R_1. Получим:

$$\begin{cases} R_2 = \frac{19{,}036}{0{,}964} R_1 \\ R_3 = \frac{1{,}044}{0{,}964} R_1 \end{cases} \quad (8)$$

Подставим в (1) и выразим R_1, а затем остальные.

Получим: $R_1 = 9{,}8684$ Ом; $R_2 = 194{,}8692$ Ом; $R_3 = 20{,}6873$ Ом

Система оценивания задачи:
Составлены уравнения (1), (2), (3) – **2 балла**
Найдены значения составлена система (7) – **2 балла**
Выражены сопротивления R_2 и R_3 через R_1 – **3 балла**
Найдены значения сопротивлений резисторов – **3 балла**
Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Кулинар»

Максим решил потренироваться перед кулинарным конкурсом. Он взял алюминиевую кастрюлю с водой, закрыл алюминиевой крышкой и поставил на газовую плиту. Максим заметил, что при этом вода с 50℃ до 51℃ нагревалась 5 секунд, а если взять алюминиевую кастрюлю с вдвое меньшим радиусом дна и вдвое меньшей высотой, но с таким же количеством воды, увеличив количество сгораемого газа в единицу времени в полтора раза, то с 50℃ до 51℃ вода будет нагреваться уже 2 секунды. За какое время вода остынет в маленькой кастрюле с 51℃ до 50℃, если её снять с плиты?

Теплоёмкость кастрюли пренебрежимо мала.

Возможное решение:

Так как при увеличении мощности нагревателя в полтора раза время уменьшилось не в полтора раза, то существует отток тепла. Поскольку кастрюля закрытая, то этот отток происходит исключительно с поверхности кастрюли.

Пусть P – мощность теплопотерь, N – мощность нагревателя. Тогда $P = kS\Delta t$, где k – коэффициент пропорциональности для данного вида кастрюли, S – площадь поверхности кастрюли, Δt - разность температуры поверхности кастрюли и окружающей среды. Отличается в обоих случаях нагревания только площадь поверхности => если P_0- мощность теплопотерь большой кастрюли, то $\frac{P_0}{4}$ – мощность теплопотерь маленькой кастрюли, так как площадь поверхности маленькой кастрюли вчетверо меньше площади поверхности большой ($S = 2\pi r(r + h)$).

Тогда имеем три уравнения теплового баланса:

$$C\Delta T = (N - P_0)t_1 \qquad (1)$$

$$C\Delta T = \left(1{,}5N - \frac{P_0}{4}\right)t_2 \qquad (2)$$

$$C\Delta T = \frac{P_0}{4}t_3 \qquad (3)$$

Где $t_1 = 5$с, $t_2 = 3$с, C – теплоёмкость воды в кастрюле.

Решая эту систему находим $t_3 = 25$с.

Система оценивания задачи:

Показано, что будет отток тепла – **1 балл**

Показано, от чего зависит отток тепла – **1 балл**

Посчитано соотношение оттоков в маленькой и большой кастрюле – **2 балла**

Уравнение (1) – **1 балл**

Уравнение (2) – **1 балл**

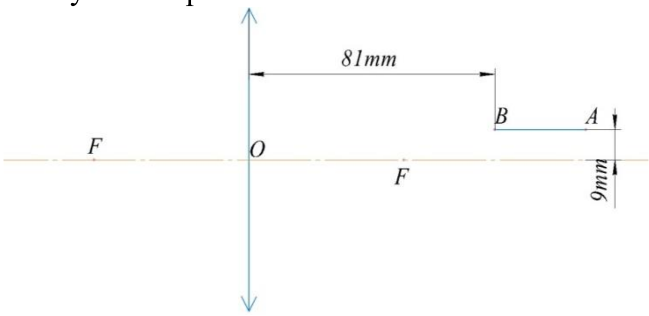
Уравнение (3) – **1 балл**

Нахождение t_3 – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

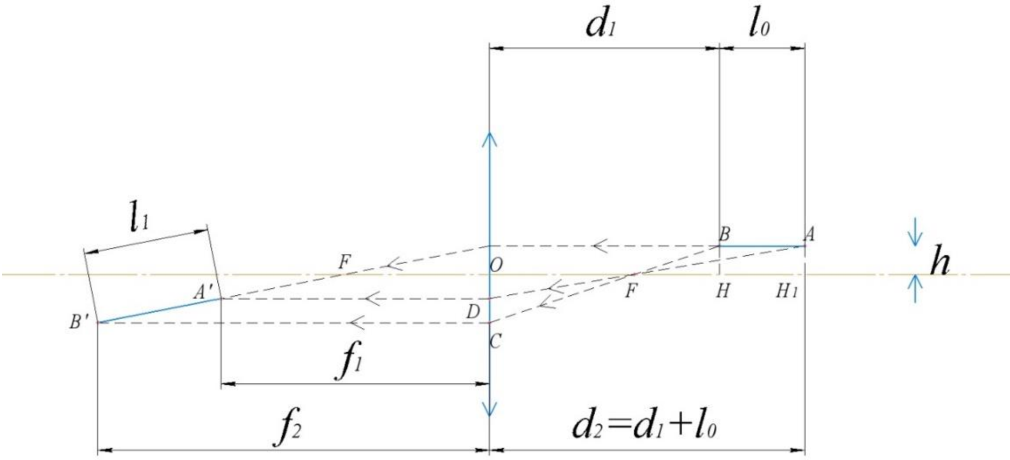
4. «Механикус»

Механикус поймал Алладина с ковром-самолётом в бутылку и разглядывал их через линзу. В некоторый момент времени ковёр летел параллельно главной оптической оси линзы так, как показано на рисунке. Ближайший край ковра-самолёта находится на расстоянии l=81 мм, расстояние до ГОО от ковра-самолёта – h=9 мм. Механикус знает, что изображение ковра-самолёта вдвое меньше по длине, чем сам ковёр-самолёт в бутылке. Помогите Механикусу определить длину ковра-самолёта. Фокусное расстояние у линзы равно F=40 мм.



Возможное решение:

Построим изображение ковра-самолёта в линзе:



Из рисунка видно, что

$$\Delta AH_1F \sim \Delta OFD => \frac{AH_1}{DO} = \frac{FH_1}{OF} => OD = \frac{hF}{d_2 - F}$$

$$\Delta BHF \sim \Delta OFC => \frac{BH}{CO} = \frac{FH}{FD} => OC = \frac{hF}{d_1 - F}$$

$$DC = \frac{hFl_0}{(d_2 - F)(d_1 - F)}$$

По построению $l_1 = \sqrt{(f_2 - f_1)^2 + DC^2}$

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F} => f_1 = \frac{Fd_1}{d_1 - F}$$

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F} => f_2 = \frac{Fd_2}{d_2 - F}$$

По условию $\frac{l_0}{l_1} = 2 => l_0 = 2l_1$

Решая эту систему уравнений, находим $l_0 = 39$ мм.

Система оценивания задачи:

Построено изображение ковра-самолёта – **2 балла**

Найдена формула $l_1 = \sqrt{(f_2 - f_1)^2 + DC^2}$ – **2 балла**

Написана формула тонкой линзы для одного конца ковра-самолёта – **1 балл**

Написана формула тонкой линзы для второго конца ковра-самолёта – **1 балл**

Записано выражение для продольного увеличения – **1 балл**

Найдена $l_0 = 39$ мм – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов