Возможные решения задач

9 класс

Задача 1. Средняя скорость

Обозначим скорость автобуса на последней трети пути через u_3. Принимая за S длину всего маршрута для времени его прохождения можно записать

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S/3}{u_1} + \frac{S/3}{u_2} + \frac{S/3}{u_3} \qquad (1)$$

Тогда средняя скорость

$$u_{cp} = \frac{S}{\dfrac{S/3}{u_1} + \dfrac{S/3}{u_2} + \dfrac{S/3}{u_3}} \qquad (2)$$

Отсюда можно выразить искомую скорость

$$u_3 = \frac{u_{cp} u_1 u_2}{3u_1 u_2 - u_{cp}\left(u_1 + u_2\right)} \qquad (3)$$

Подставив в это выражение $u_{ср}$ = 70км/ч получим $u_3 \approx 162$ км/ч.

Полученное значение для скорости автобуса достаточно большое и, конечно же, противоречит правилам дорожного движения, поэтому реальному водителю лучше не гнаться за указанным средним.

Подставляя в формулу (3) $u_{ср}$ = 90км/ч, мы обнаруживаем, что u_3 = –300 км/ч, что противоречит здравому смыслу, поскольку автобус должен двигаться только вперёд. Проанализируем выражение (3). Знаменатель обращается в нуль при $u_{cp} = \dfrac{3u_1 u_2}{u_1 + u_2} \approx 82$ км/ч. При этом u_3 стремится к бесконечности, т.е. это предельное значение средней скорости автобума на всём маршруте, возможное при данных условиях движения. Таким образом, скорости движения автобуса на первых двух участках маршрута ограничивают максимальное значение его средней скорости на всём пути. Заданное в условии значение средней скорости $u_{ср}$ = 90км/ч не может быть достигнуто ни при каких значениях u_3.

Критерии оценивания решения:

2 балла – получено выражение (2) для средней скорости

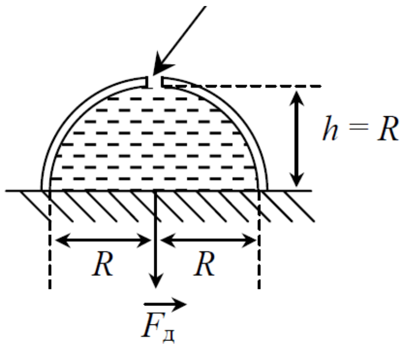
2 балла – получено выражение (3) для расчёта скорости на третьем участке

2 балла – верно вычислена скорость при $u_{ср}$ = 70км/ч и сделан вывод о реальности достижения полученного значения в жизни (1 балл)

2 балла – верно вычислена скорость при $u_{ср}$ = 90км/ч. Полученное значение проанализировано с точки зрения здравого смысла

2 балла – проанализировано выражение (3). Определено предельное значение средней скорости на всём маршруте при заданных условиях; обозначено, что заданное в условии значение средней скорости $u_{ср}$ = 90км/ч не может быть достигнуто ни при каких значениях u_3

Задача 2. Полуцилиндр



1) Гидростатическое давление столба жидкости $h = R$, оказываемое водой, в случае полного наполнения полуциндра:

$$p = \rho g h = \rho g R \tag{1}$$

2) С другой стороны, давление равняется отношению силы давления жидкости $F_д$ на площадь, равную $S = 2RL$, где L – длина полуцилиндра. Тогда, сила $F_д$, с учетом (1) определяется как:

$$F_д = pS = 2\rho g R^2 L \tag{2}$$

3) В момент подъема полуцилиндра, когда вода начинает вытекать, полуцилиндр опирается на воду:

$$F_д = (m + M)g, \tag{3}$$

где M – масса полуцилиндра. Тогда, подставив значение (2), получим:

$$2\rho g R^2 L = (m + M)g. \tag{4}$$

4) Масса воды, залитой в полуцилиндр, с учетом объема полуцилиндра $V = \frac{\pi R^2}{2} L$, равняется:

$$m = \rho V = \frac{\pi R^2}{2} \rho L. \tag{5}$$

Из выражения (5), получаем:

$$\rho L R^2 = \frac{2m}{\pi}. \tag{6}$$

5) Подставляем (6) в (4) и выражаем M. Окончательный вид выражения для массы полуцилиндра:

$$M = \frac{4 - \pi}{\pi} m. \tag{7}$$

Критерии оценивания решения:

1 балл – определено гидростатическое давление (1);
2 балла – получено выражение для силы давления жидкости (2);
3 балла – получено выражение равенства силы давления жидкости и силы тяжести воды и полуцилиндра (4);
1 балла – получено выражение для массы воды m (5);
3 балла – получено выражение для M (7), через массу воды в полуцилиндре.

Задача 3. Блоки и лёд

1) В случае равновесия, сила натяжения нити перекинутой через блок C с каждой из сторон равна mg. В силу невесомости блока C, сила натяжения нити соединенной с кусочком льда равна $2mg$, так как пружина вызывает то же натяжение нити у блока C, что и груз массой m.

2) Для кусочка льда сумма всех действующих сил равна 0:

$$-T - F_A + F_T = 0, \tag{1}$$

$$T = F_T - F_A, \tag{2}$$

$$2mg = m_л g - \rho_в V_{погр} g, \tag{3}$$

где $m_л$ – масса льда, $V_{погр}$ – объем погруженной части кусочка льда.

3) По мере таяния льда масса $m_л$ будет уменьшаться и, следовательно, будет уменьшаться $V_{погр}$. Это будет происходить пока $V_{погр}$ не станет равен нулю, то есть лёд выйдет полностью из воды. Из равенства (4) получаем, что конечная масса льда $m_{лк}$, при которой лёд полностью выйдет из воды равна:

$$2mg = m_л g, \tag{4}$$

$$m_{лк} = 2m. \tag{5}$$

4) Определим начальную массу льда $m_л$. Изначально лёд погружен наполовину в воду, а следовательно:

$$V_{погр} = \frac{m_л}{2\rho_л}. \tag{6}$$

Подставим (7) в (4) и получим:

$$2mg = m_л g - \frac{\rho_в m_л g}{2\rho_л} \tag{7}$$

$$m_л = \frac{2m}{1 - \frac{\rho_в}{2\rho_л}} \tag{8}$$

5) В момент полного выхода льда из воды, масса растаявшего льда равна:

$$\Delta m = m_л - m_{лк} = \frac{2m}{\frac{2\rho_л}{\rho_в} - 1} = 0.025 \text{ кг} = 25 \text{ г} \tag{9}$$

6) В процессе таяния льда, тепло отданное водой пошло на плавление льда массой Δm и нагревание воды массой Δm, образовавшейся из растаявшего льда. Исходя из этого составляем уравнение теплового баланса и определяем $t_к$:

$$cV\rho_в(t_н - t_к) = \lambda\Delta m + c\Delta m(t_к - t_л), \tag{10}$$

(11)

$$t_к = \frac{V\rho_в t_н + \Delta m\left(t_л - \frac{\lambda}{c}\right)}{\Delta m + V\rho_в} \approx 9.1\ ^\circ\mathrm{C}$$

Критерии оценивания решения:

1 балл – определена сила натяжения нити со стороны кусочка льда (1 пункт);
2 балла – получено выражение (3) для кусочка льда;
2 балла – определена конечная масса льда $m_{лк}$, когда лед полностью выйдет из воды (5);
2 балла – получено выражение для начальной массы льда (через $V_{погр}$) (8);
1 балл – определена масса льда, растаявшего до момента полного выхода из воды (9);
2 балла – получено выражение для $t_к$ (11).

Задача 4. Электрическая цепь

Пусть R_A, R_V и R – сопротивления амперметра, вольтметра и резистора, а через U – напряжение источника. Тогда по закону Ома в первом и во втором случаях получаем:

$U = I_1R_A + U_1$, $U = I_2R_A + U_2$ (1)

Откуда

$(I_1 - I_2)R_A = U_2 - U_1$

$$R_A = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 2\,\text{Ом};\quad U = I_1\frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} + U_1 = 3\,\text{В} \qquad (2)$$

В первом случае через параллельно соединённые вольтметр и резистор течёт суммарный ток

$$I_1 = U_1\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right) \qquad (3)$$

Во втором случае на параллельно соединённых амперметре и резисторе падает напряжение $U - U_2$. Поэтому в данном случае ток, текущий через резистор $(U - U_2)/R$, а ток через вольтметр $(U - U_2)/R + I_2$. С другой стороны этот U_2/R_V, то есть

$$\frac{U - U_2}{R} + I_2 = \frac{U_2}{R_V} \qquad (4)$$

Из записанных соотношений получаем:

$$\frac{U}{R} = U_2\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right) - I_2 = I_1\frac{U_2}{U_1} - I_2; \qquad (5)$$

$$R = \frac{U}{I_1\dfrac{U_2}{U_1} - I_2} = \frac{I_1U_2 - I_2U_1}{I_1 - I_2}\cdot\frac{U_1}{I_1U_2 - I_2U_1} = \frac{U_1}{I_1 - I_2} = 2\,\text{Ом} \qquad (6)$$

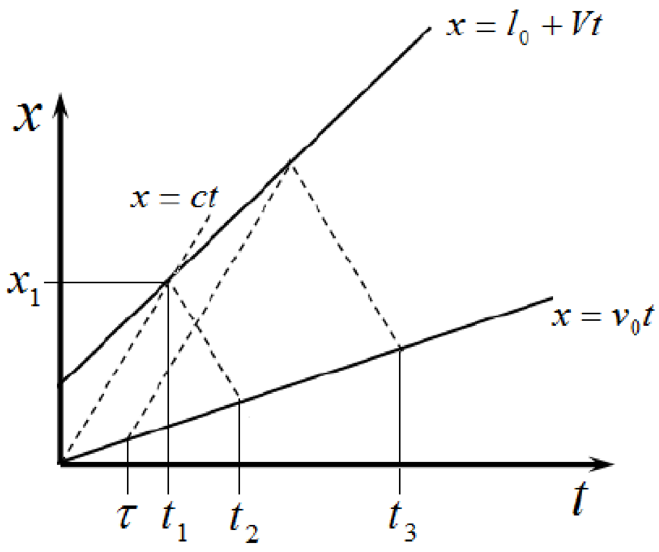
$$\frac{1}{R_V} = \frac{I_1}{U_1} - \frac{1}{R} = \frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_1} = \frac{I_2}{U_1}; \qquad (7)$$

$$R_V = \frac{U_1}{I_2} = 2\,\text{Ом} \qquad (8)$$

Критерии оценивания решения:

2 балла – записано соотношение (1) для каждого случая (по одному баллу)
2 балла – определены токи, текущие по элементам цепи для каждого случая (по одному баллу)
2 балла – верно определено сопротивление амперметра
2 балла – верно определено сопротивление резистора
2 балла – верно определено сопротивление вольтметра

Задача 5. Локатор



Проще и нагляднее решить данную задачу, построив схематический график законов движения машин и сигналов. Эти законы движения имеют вид:

– машины инспектора (считаем, что первый сигнал послан в момент времени $t = 0$):

$$x = v_0 t \;; \qquad (1)$$

– машины нарушителя (считаем, что начальное расстояние между машинами равно l_0):

$$x = l_0 + Vt \;; \qquad (2)$$

– первого сигнала:

$$x = ct. \qquad (3)$$

Сигнал догонит машину нарушителя в момент времени t_1, удовлетворяющий уравнению

$$l_0 + Vt_1 = ct_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{l_0}{c - V} \qquad (4)$$

в точке с координатой

$$x_1 = ct_1 = \frac{c}{c - V} l_0. \qquad (5)$$

Закон движения отраженного сигнала записывается в виде:

$$x = x_1 - c(t - t_1) = 2x_1 - ct = 2\frac{c}{c - V} l_0 - ct. \qquad (6)$$

Этот отраженный сигнал встретится с машиной полиции в момент времени t_2:

$$2\frac{c}{c - V} l_0 - ct_2 = v_0 t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{2cl_0}{(c - V)(c + v_0)}. \qquad (7)$$

Второй сигнал послан в момент времени τ, когда расстояние между автомобилями стало равным $(l_0 + (V - v_0)\tau)$, поэтому он вернется к машине полиции в момент времени t_3, который может быть найден с помощью формулы (7):

$$t_3 = \tau + 2\frac{c}{(c - V)(c + v_0)}(l_0 + (V - v_0)\tau) = \tau + t_2 + 2\frac{c(V - v_0)}{(c - V)(c + v_0)}\tau. \qquad (8)$$

Таким образом, время между возвращения двух последовательных импульсов равно:

$$\tau' = t_3 - t_2 = \tau + 2\frac{c(V - v_0)}{(c - V)(c + v_0)}\tau. \qquad (9)$$

Учитывая, что скорость сигнала значительно больше скорости автомобилей, формула (9) упрощается до:

$$\tau' \approx \tau + 2\frac{(V - v_0)}{c}\tau. \qquad (10)$$

Критерии оценивания решения:

1 балл – определены законы движения машин и сигнала (1,2,3)

1 балл – верно определены t_1 и x_1 (4,5)

2 балла – получено выражение для закона движения отраженного сигнала (6) и определено t_2 (7)

3 балла – верно определено расстояние между автомобилями $(l_0 + (V - v_0)\tau)$ и получено выражение для t_3 (8)

2 балла – получено выражение для нахождения τ' (9)

1 балл – правильно произведено упрощение τ' (10)