1. Прыг-скок. С некоторой высоты над горизонтальной поверхностью пола с нулевой начальной скоростью отпустили теннисный мяч. Известно, что при каждом ударе кинетическая энергия уменьшалась на 19 % (от значения до удара). Движение мяча прекратилось через время $\tau = 7$ с. Определите скорость υ_2 мяча сразу после второго удара. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Возможное решение:

По условию после каждого удара энергия системы уменьшается: $W_{n+1} = 0{,}81 \cdot W_n$, а скорость $\upsilon_{n+1} = \sqrt{0{,}81} \cdot \upsilon_n = 0{,}9 \cdot \upsilon_n$. Значит относительная доля потери скорости равна $\alpha = 0{,}1$. Если начальная высота мяча была равна h, то скорость после n-го удара будет равна: $\upsilon_n = \sqrt{2g \cdot h} \cdot (1-\alpha)^n$.

Время до первого удара $t_0 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot h}{g}}$, а время между n-м и n+1-м соударениями $t_n = \dfrac{2 \cdot \upsilon_n}{g} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot h}{g}} \cdot (1-\alpha)^n$.

Тогда соударения шарика со столом прекратятся через время, равное:

$$\tau = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \cdot \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right).$$

С учётом этого искомая скорость мяча υ_2 сразу после второго удара:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g \cdot h} \cdot (1-\alpha)^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2-\alpha} g\tau \approx 3{,}0 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

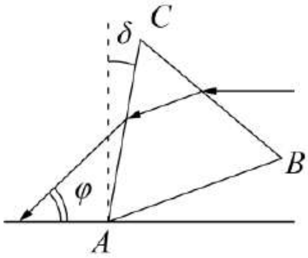
Ответ:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g \cdot h} \cdot (1-\alpha)^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2-\alpha} g\tau \approx 3{,}0 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Записан закон изменения полной энергии после удара	1
2.	Записан закон изменения максимальной скорости после удара	1
3.	Получено время первого падения	1
4.	Получено время n-го прыжка	1
5.	Установлена связь полного времени движения с начальной высотой или скоростью первого удара	3
6.	Установлена связь скорости υ_2 с начальной высотой или скоростью первого удара	1
7.	Установлена связь скорости υ_2 и полного времени движения	1
8.	Получен численный ответ	1
итого:		**10**

2. Сквозь призму. Луч света распространяется параллельно поверхности, на которой установлена равносторонняя треугольная стеклянная призма, грань AC которой образует угол $\delta = 18^\circ$ с нормалью к поверхности. Луч света преломившись, распространяется внутри призмы параллельно основанию AB. Определите:



1) угол φ между лучом, вышедшим из призмы, и поверхностью, на которой она установлена;
2) коэффициент преломления n стекла.

Возможное решение. $\gamma = 90^\circ - \delta - \beta = 12^\circ$

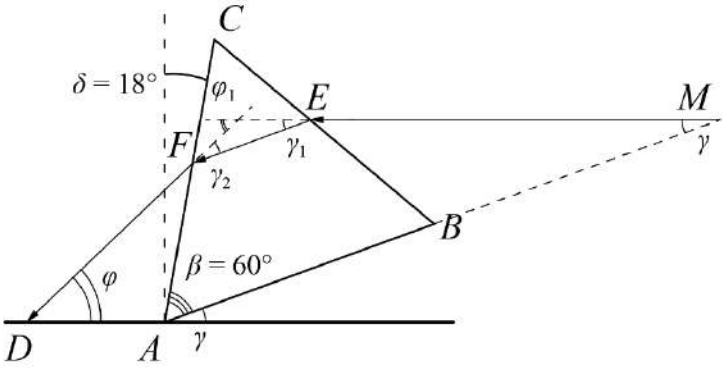
$\begin{cases} \gamma = \gamma_1 \\ \varphi = \varphi_1 \end{cases}$ как внутренние накрест лежащие ($EM \parallel DA$)

$\varphi = \gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma = 24^\circ$ по теореме о внешнем угле треугольника.

Угол падения луча EM на призму $\alpha_1 = 90^\circ - (60^\circ - \gamma) = 42^\circ$

Угол преломления $\alpha_2 = 30^\circ (EF \parallel BA)$

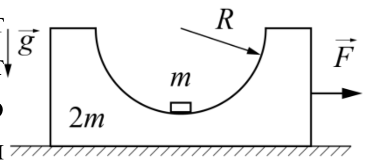
$$n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \approx 1{,}34$$



Критерии оценивания.

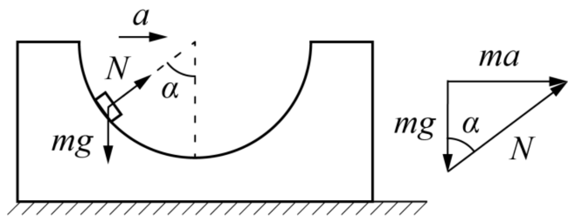
№	**критерий**	**баллы**
1.	Найден угол $\gamma = 12^\circ$	1
2.	Показано что $\begin{Bmatrix} \varphi = \varphi_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{Bmatrix}$ как внутренние накрест лежащие или использованы аналогичные соображения	2
3.	Показано что $\varphi_1 = 2\gamma = 24^\circ$ по теореме о внешнем угле треугольника	2
4.	Найден угол падения $\alpha_1 = 42^\circ$	2
5.	Найден угол преломления $\alpha_2 = 30^\circ$	2
6.	Найден показатель преломления: $n \approx 1{,}34$	1
итого:		**10**

3. В лунке. В бруске, находящемся на горизонтальной поверхности, сделано гладкое сферическое углубление радиусом R. В углублении лежит маленькая шайба массы m. К бруску прикладывают горизонтальную силу F, плавно увеличивая её значение от 0 до F_0. Найдите максимальную высоту, на которую поднимется шайба, если масса бруска $2m$. Ускорение свободного падения g. Трением в системе можно пренебречь.



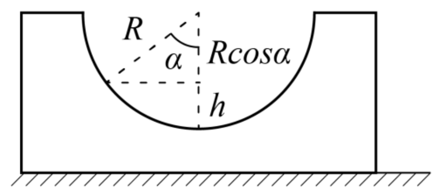
Возможное решение:
При плавном, без сильных рывков, увеличении внешней силы шайба будет постепенно подниматься в лунке, что бы горизонтальная компонента силы реакции со стороны бруска обеспечивала одинаковое с бруском ускорение. Значит максимальный подъём будет при достижении силой значения F_0.
Применим 2й закон Ньютона (в проекции на горизонтальную ось) ко всей системе и найдём ускорение поступательного движения тел:

$$3ma = F_0 \Rightarrow a = \frac{F_0}{3m}$$



Запишем 2й закон Ньютона для шайбы в момент наивысшего подъёма:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$$



Далее можно либо через проекции, либо используя векторный треугольник сил связать угол α и F_0:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{F_0}{3mg}$$

Высота подъёма h связана с радиусом лунки R и углом α:

$$h = R(1-\cos\alpha)$$

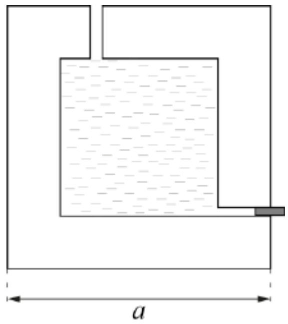
Осталось связать высоту и силу:

$$h = R(1-\cos\alpha) = R\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\right) = R\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{F_0}{3mg})^2}}\right) = R\left(1-\frac{3mg}{\sqrt{F_0^2+(3mg)^2}}\right)$$

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Указано, что максимальный подъём соответствует F_0	1
2.	Указано, что у бруска и шайбы одинаковое ускорение (они неподвижны друг относительно друга)	1
3.	Найдено ускорение a	1
4.	Угол отклонения (любая его тригонометрическая функция) выражен через F_0	2
5.	Высота h связана с углом отклонения	2
6.	h выражен через F_0	3
итого:		**10**

4. Гидростатика. Сосуд представляет собой куб с длиной ребра a. Внутренняя полость сосуда также имеет форму куба с длиной ребра $4a/5$. Толщина всех стенок сосуда одинакова. Плотность материала, из которого изготовлен сосуд, 3ρ. На уровне дна полости и в её потолке имеются сквозные отверстия малого диаметра. Сосуд заполнен водой (плотность воды ρ). Нижнее отверстие закрыто пробкой. Сосуд помещают в пустой цилиндр с площадью дна $3a^2$. Стык между сосудом и дном цилиндра герметизируют, чтобы вода под сосуд не подтекала. При этом воздух между неровностями сосуда и дном цилиндра остаётся при атмосферном давлении. Затем вынимают пробку из отверстия куба. Во сколько раз отличаются силы давления сосуда на дно цилиндра до извлечения пробки и после прекращения вытекания жидкости?



Возможное решение:

Возможны два сценария развития событий. Либо вода полностью выльется из полости и ее уровень окажется ниже отверстия в стенке сосуда, либо уровень воды окажется выше уровня отверстия и, следовательно, в полости останется некоторое количество воды. Второй случай сложнее для вычислений. Проверим сначала первый вариант. Используем равенство начального объема воды и объема воды, вылившейся в стакан.

$\frac{64}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h$, где h – искомая высота уровня воды. После вычислений получаем:

$$\frac{64}{125}a^3 = 2a^2h, \quad h = \frac{64}{250}a$$

Это больше толщины стенки сосуда d, которая в нашем случае равна $d = \frac{a-\frac{4}{5}a}{2} = \frac{1}{10}a$. Значит, реализуется второй вариант, когда часть воды останется в полости сосуда. Запишем условие равенства объемов воды для второго случая:

$$\frac{64}{125}a^3 = (3a^2 - a^2)h + \frac{16}{25}a^2\left(h - \frac{a-\frac{4}{5}a}{2}\right)$$

$$\frac{64}{125}a^3 = 2a^2h + \frac{16}{25}a^2h - \frac{16}{250}a^3$$

$$\frac{144}{250}a^3 = \frac{66}{25}a^2h$$

$$h = \frac{12}{55}a$$

Таким образом, вода установится на высоте $h = \frac{12}{55}a$ от дна стакана, а в сосуде ее высота окажется равной $h_1 = h - \frac{a-\frac{4}{5}a}{2} = \frac{12}{55}a - \frac{1}{10}a = \frac{13}{110}a$

Сила давления сосуда в первом случае F_1 определяется массой самого сосуда и массой заполняющей его воды

$$F_1 = \left(a^3 - \frac{64}{125}a^3\right)3\rho g + \frac{64}{125}a^3\rho g = \frac{247}{125}a^3\rho g$$

После вынимания пробки часть воды выльется в стакан. Сила Архимеда в данной задаче не возникает, так вода под сосуд не подтекает. Следовательно, сила давления сосуда во втором случае F_2 определяется массой самого сосуда и массой, оставшейся в нем воды (силой давления оставшейся в полости воды на ее дно)

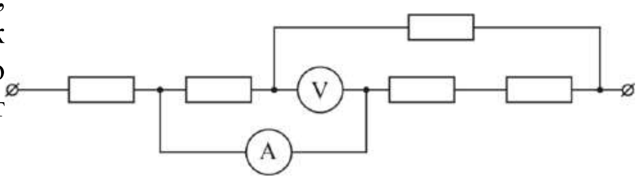
$$F_2 = \left(a^3 - \frac{64}{125}a^3\right)3\rho g + \frac{13}{110}a\frac{16}{25}a^2\rho g = \frac{2117}{1375}a^3\rho g$$

Найдем отношение $\frac{F_1}{F_2} = \frac{247}{125} \cdot \frac{1375}{2117} = \frac{2717}{2117} \approx 1{,}3$

Критерии оценивания.

№	**критерий**	**баллы**
1.	Проверка реализации второго сценария (в сосуде остается вода)	0,5
2.	Правильно записан объем воды до выливания	0,5
3.	Правильно записан объем воды после выливания	1
4.	Получен уровень воды в сосуде после вынимания пробки	2
5.	Вычисление силы давления F_1 (до открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	2
6.	Вычисление силы давления F_2 (после открытия отверстия) (Если использована правильная формула для вычисления, но из-за арифметических ошибок, результат не верный, то 1 балл)	3
7.	Получено правильное отношение $\frac{F_1}{F_2}$	1
итого:		**10**

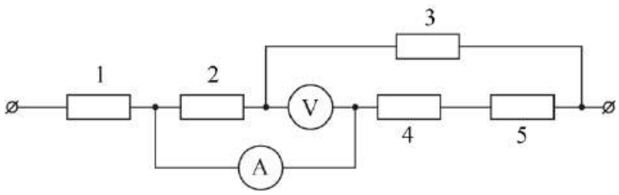
5. **Почти идеально.** Участок цепи, показанный на рисунке, подключён к идеальному источнику постоянного напряжения. Идеальные приборы показывают 2 А и 6 В. Все резисторы в цепи одинаковые. Определите:

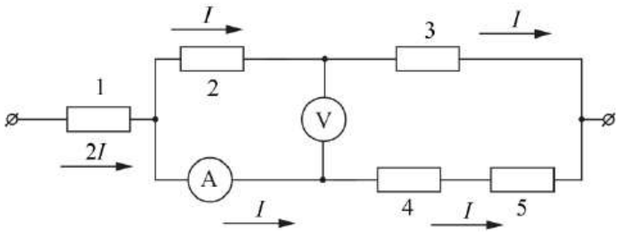


1) сопротивление одного резистора R;
2) напряжение источника U_0;
3) показания приборов, если их поменять местами;
4) тепловую мощность, выделяющуюся на крайнем левом резисторе, если приборы в цепи поменяют местами.

Возможное решение:

Перерисуем для удобства схему:



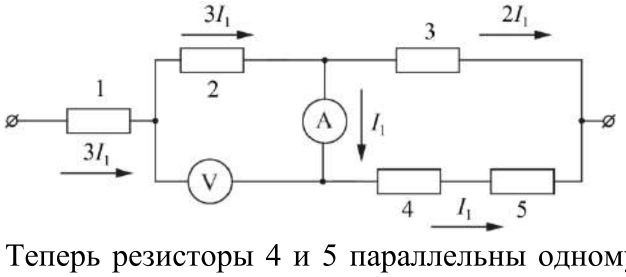


Так как идеальный вольтметр эквивалентен разрыву цепи, а падение напряжения на идеальном амперметре равно 0, то резисторы 2 и 3 параллельны резисторам 4 и 5. Из равенства сопротивлений резисторов следует, что амперметр показывает половину общего тока. Такой же ток бежит через резистор 2, напряжение на котором показывает вольтметр. Значит сопротивление резистора R = 3 Ом.

Напряжение источника падает на резисторах 2 и 3 (по 6 В) и на резисторе 1 (12 В, так как сила тока через него в два раза больше).

U_0 = 24 В.

Если поменять приборы местами распределение токов изменится:



Теперь резисторы 4 и 5 параллельны одному резистору 3, значит ток через них в 2 раза меньший. Через резисторы 1 и 2 бежит общий неразветвленный ток (в 3 раза больший чем через резистор 4), через амперметр ток отводится на ветку 4-5. Общее напряжение не изменилось. Запишем его как сумму падений напряжения на резисторах 1,2 и 3:

$$U_0 = 3I_1R + 3I_1R + 2I_1R$$

$$I_1 = \frac{U_0}{8R} = 1\text{ А}$$

Это и покажет амперметр.

Показания вольтметра равны падению напряжения на резисторе 2:

$U = 3I_1R = 9$ В

Тепловую мощность, выделяющуюся на резисторе 1 найдём из закона Джоуля-Ленца:

$N = (3I_1)^2 R = 27$ Вт

Критерии оценивания.

№	критерий	баллы
1.	Получен ответ: 3 Ом	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за любые правильные действия, ведущие к ответу (например, верно перерисована схема, или верно расставлены токи в схеме, или есть верно записанный закон Ома)	
2.	Получен ответ: 24 В	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за правильные действия, ведущие к ответу (например, первый ответ неверен, а верное решение на него опирается)	
3.	Получен ответ для амперметра: 1 А	2
4.	Получен ответ для вольтметра: 9 В	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за любые правильные действия, ведущие к ответу (например, верно перерисована схема, или верно расставлены токи в схеме)	
5.	Получен ответ: мощность 27 Вт	2
	Если верного ответа нет, то можно ставить 1 балл за правильную запись формулы мощности постоянного тока	
итого:		**10**