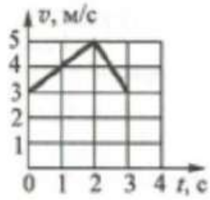
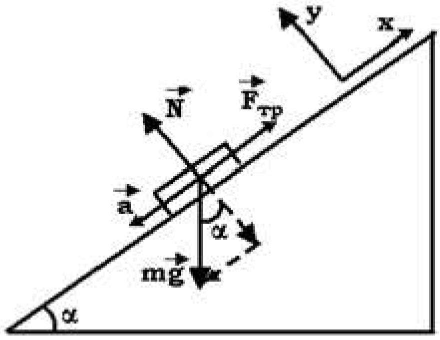
1. «Сани»

   Сани соскальзывают с пригорка с углом наклона к горизонту α ($\sin\alpha = \frac{1}{5}$). Коэффициент трения скольжения μ между санями и пригорком неодинаков на протяжении всего пригорка. График зависимости скорости саней от времени показан на рисунке. Найдите максимальное значение μ.



Возможное решение:

1. Ускорение равно тангенсу угла наклона графика скорости от времени. Следовательно, оно максимально на участке от 2 с до 3 с : $a_x = -2\frac{\text{м}}{\text{с}}$.



2. Закон Кулона-Амонтона: $F_{\text{тр}} = \mu N$
3. Распишем второй закон ньютона в проекциях на оси:

Ox: $-mg\sin\alpha + \mu N = ma$

Oy: $N = mg\cos\alpha$

4. Откуда $\mu = \frac{g\sin\alpha + a}{g\cos\alpha} = \frac{4}{4\sqrt{6}} \approx 0{,}4$

Система оценивания задачи:

По графику найдено, где ускорение больше и его величина – **3 балла**

Записан закон Кулона-Амонтона – **2 балла**

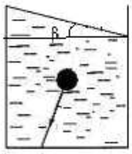
Записан второй закон Ньютона – **2 балла**

Найден коэффициент трения – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

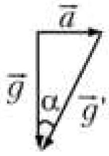
2. «Необычное плавание»

   Тело с плотностью $\rho < \rho_в$, где $\rho_в -$ плотность воды, связан нитью с дном большого сосуда, заполненного водой. Найдите ускорение, с которым движется из состояния покоя сосуд, и направление движения сосуда, если свободная поверхность жидкости наклонена к горизонту под углом β. Ускорение свободного падения равно g.

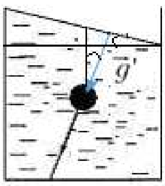


Возможное решение:

1. Если перейти в систему отсчёта, связанную с сосудом, то жидкость и шар будут покоиться в поле силы тяжести $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$.



2. $tg\alpha = \frac{a}{g} => a = g \cdot tg\alpha$
3. Свободная поверхность будет перпендикулярна вектору $\vec{g}'$, при этом сила тяжести и сила Архимеда перпендикулярны свободной поверхности жидкости, поэтому и сила натяжения нити будет перпендикулярна свободной поверхности жидкости (иначе не будет сумма сил вдоль поверхности равна нулю).
4. По построению видно, что $\alpha = \beta$. Следовательно $a = g \cdot tg\beta$, а движение вправо.



Система оценивания задачи:

Показано, куда будет действовать равнодействующая сил тяжести, натяжения и Архимеда (найдено направление ускорения) – **1 балл**

Написан второй закон Ньютона и найдено соотношение между ускорением a и g через угол нити и вертикали – **3 балла**

Найден угол между $\vec{g}'$ и свободной поверхностью жидкости – **3 балла**

Геометрически показано, что $\alpha = \beta$. – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Ваза»

   В цветочную вазу с водой (стенки вазы вертикальны) поместили льдинку, в которую при заморозке попал кусочек металла. В результате уровень воды в сосуде поднялся на 110 мм, а лёд полностью погрузился в воду. На сколько опустится уровень воды в вазе за время таяния всего льда? Плотность стекла 2,7 $\frac{г}{см^3}$, воды 1 $\frac{г}{см^3}$, льда 0,9 $\frac{г}{см^3}$.

Возможное решение:

1. Обозначим первоначальный объем льда через $V_л$, а объем металла — через $V_м$. Когда кусок льда полностью погрузился в воду, он вытеснил объем воды, равный $V_{выт} = V_л + V_м$
2. Этот же объем равен $V_{выт} = hS$, где S — площадь поперечного сечения сосуда.
3. Теперь запишем условие плавания куска льда с вмороженным куском металла— суммарная сила тяжести льда и металла равна выталкивающей силе:
$$\rho_л V_л g + \rho_м V_м g = \rho_в (V_л + V_м) g$$
4. Из совместного решения полученных уравнений найдем объемы льда и металла: $V_л = \frac{(\rho_м - \rho_в)hS}{\rho_м - \rho_л}$; $V_м = \frac{(\rho_в - \rho_л)hS}{\rho_м - \rho_л}$.
5. Из растаявшего льда образовалась вода объемом
$$V_в = \frac{\rho_л V_л}{\rho_в}$$
6. Поскольку кусок металла остается в воде, понижение уровня воды в сосуде за время таяния льда будет равно
$$\Delta h = V_л - V_в = \left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right)\frac{(\rho_м - \rho_в)h}{\rho_м - \rho_л} \approx 10{,}4 \text{ см}$$

Система оценивания задачи:

Выражен объём вытесненной жидкости через объём металла и льда – **1 балл**

Выражен объём вытесненной жидкости через высоту подъёма жидкости – **1 балл**

Записано условие равновесия куска льда – **3 балла**

Выражен объём льда – **1 балл**

Выражен объём металла – **1 балл**

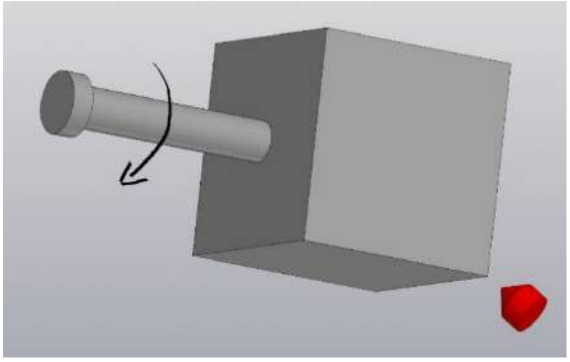
Выражен объём образовавшейся из растаявшего льда воды – **1 балл**

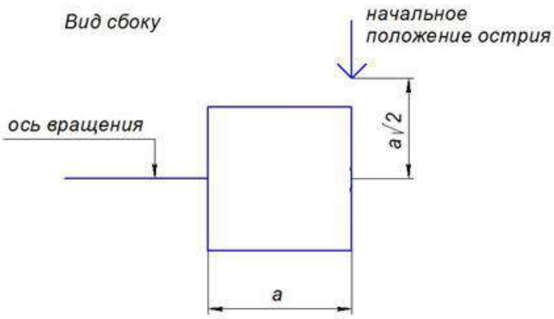
Найдено понижение уровня воды – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Токарный станок»

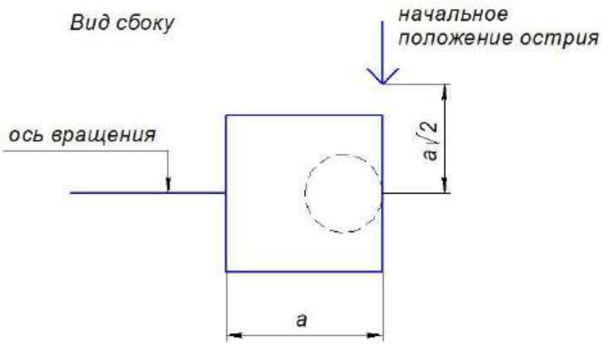
Толщина острия для выделки деталей на токарном станке равна 0,1 мм. Остриё может двигаться вправо-влево, вверх-вниз и вперёд-назад с максимальной скоростью $v = 10$ мм/с. За какое минимальное время из однородной кубической детали сделают шар диаметром, вдвое меньшим стороны кубической детали? Скорость вращения детали вокруг своей оси считать много большей скорости движения острия. Начальное положение острия совпадает с ближайшим к кубу положением, при котором ещё не срезается часть куба. Остриё направлено перпендикулярно оси вращения (смотри рисунок). Сторона куба равна a = 10 см.





Возможное решение:

1. Из условия очевидно, что центр шара будет находится где-то на оси вращения.

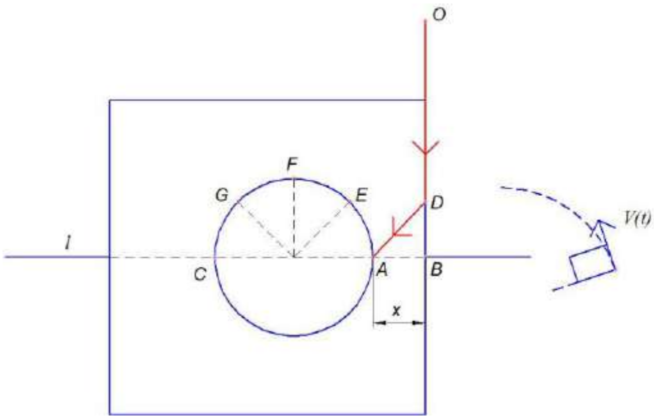


2. Рассмотрим шар, который находится на расстоянии x от правой грани куба.

   Пусть точка A – самая правая точка шара. Заметим, что остриё должно попасть и в точку A, и в точку C.

   Кратчайший по времени способ добраться до точки A есть путь ODA (см. рисунок), при котором остриё всё время движется к оси и на участке DA включается боковая скорость (движение под 45 градусов). Такой путь занимает:

   $t_1 = \frac{a\sqrt{2}}{v} \approx 14{,}1$ с.



3. Далее мы пойдём от A к C по верхней полуокружности. Заметим, что в каждый момент времени скорость острия должна быть направлена по касательной к окружности, чтобы получилось вырезать шар радиусом $R = \frac{a}{4}$.
4. Максимизируя скорость, получим, что в каждый момент времени проекция на горизонталь или вертикаль должна быть равна v: на участках AE и GC – проекция по вертикали равна v, на участках EF и FG – по горизонтали равна v. На участках AE и GC остриё должно пройти по вертикали путь $\frac{a}{4\sqrt{2}}$, а на участках EF и FG такой же путь по горизонтали. Время прохождения этих путей равно $t_2 = \frac{a}{4\sqrt{2}v} = 1{,}8$ с.
5. Общее минимальное время выделывания шарика будет равно $t = t_1 + 4t_2 = 21{,}3$ с.

Система оценивания задачи:

Показано на рисунке или рассуждением, как должно двигаться остриё, чтобы вырезать шар – **2 балла**

Найдена кратчайшая траектория движения до точки A – **2 балла**

Найдено время движения острия до точки A – **1 балл**

Показано, что в каждый момент времени скорость острия должна быть направлена по касательной к окружности при движении от точки A к точке C – **1 балл**

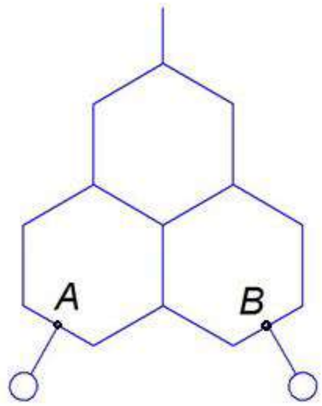
Указано, что проекции скорость на соответствующих участках должны быть равны v – **3 балла**

Найдено общее время движения острия – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «Схема»

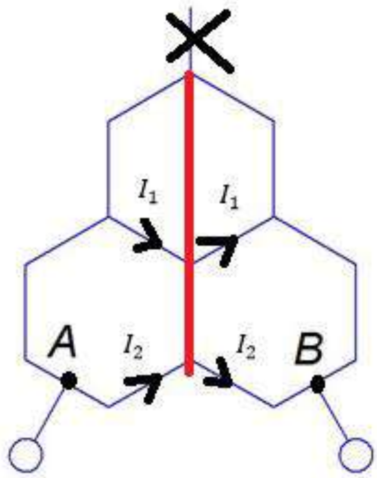
Определите сопротивление между точками A и B, если сопротивление каждого ребра равно R = 28 Ом.



Возможное решение:

В большинстве соединений понятно, как и куда текут тока, но есть два «сложных» места.

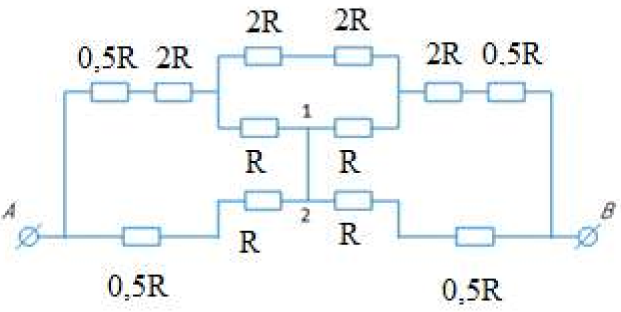
Если мы рассмотрим данную схему внимательно, то заметим, что при смене полярности подключаемого источника, токи по всем симметричным относительно вертикальной (выделена красным) оси одинаковы. Следовательно, в самых «сложных» местах токи текут так, как показано на рисунке



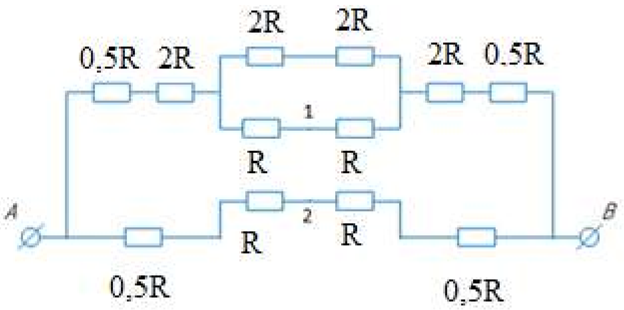
По верхнему проводу вообще ток не течёт.

Изобразим данную в задаче схему в виде эквивалентной ей.

Каждый резистор имеет сопротивление 0,5R.



Поскольку токи между 1 и 2 не текут => эти соединения мы можем просто убрать из эквивалентной схемы. Тогда имеем:



Сопротивление этой схемы уже легко считается. Итоговое значение:

$$R_0 = 57\text{Ом}$$

Система оценивания задачи:

Изображены направления токов в «сложных» местах– **2 балла**

Построена эквивалентная схема – **2 балла**

Показано, почему между точками 1 и 2 ток не течёт, и построена новая эквивалентная схема– **3 балла**

Записаны законы последовательного и параллельного соединения – **1 балл**

Получено общее сопротивление на данном участке – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов