

Задача 1. Квадрокоптеры

НИИ Небоевых Роботов проводил испытания квадрокоптеров. Была составлена такая программа патрулирования: два коптера одновременно вылетают из одной точки на базе, первый в течение 6 минут летит на север, а второй – на юг, затем коптеры разворачиваются, первый летит на юг, второй – на север, пока они не встречаются. Собственная скорость каждого коптера 10 км/ч. К сожалению, разработчики не учли наличие ветра, а коптеры не умеют корректировать курс с учётом ветра. Скорость ветра 1 км/ч. На каком расстоянии x от точки старта встретятся коптеры, если ветер дует с юга на север? Если ветер дует с запада на восток?

Решение

Введём обозначения: \vec{u} – собственная скорость коптеров (относительно воздуха), \vec{V} – скорость ветра.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимся воздухом. В этой системе оба коптера движутся в противоположные стороны со скоростями u в течение 6 минут, затем разворачиваются и движутся навстречу друг другу с теми же скоростями, очевидно, ещё в течение 6 минут. Полное время движения коптеров $t_{\text{п}} = 12$ минут. Точка старта в этой системе отсчёта движется со скоростью ветра V вне зависимости от его направления. Точка старта за всё время сместится на расстояние $x = V \cdot t_{\text{п}} = 1 \text{ км/ч} \cdot \frac{12}{60} \text{ ч} = 0,2 \text{ км}$. Таким образом $x_1 = x_2 = 0,2 \text{ км}$.

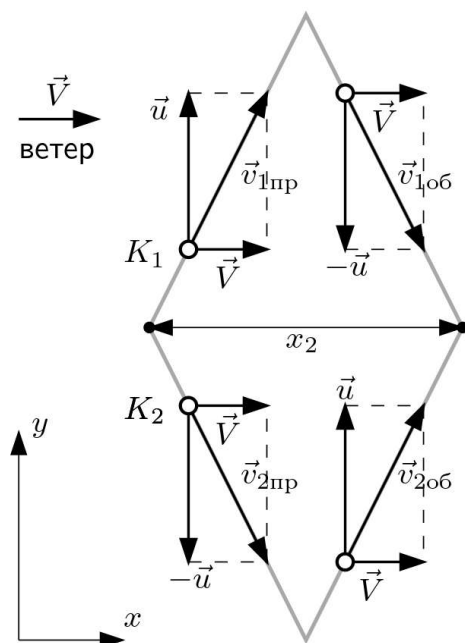
Возможное альтернативное решение.

Задачу можно решить, если использовать закон сложения скоростей, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$.

Рассмотрим случай, когда ветер дул с юга на север. Тогда в течение первых шести минут первый коптер будет лететь на север со скоростью $u + V = 11 \text{ км/ч}$, второй на юг со скоростью $u - V = 9 \text{ км/ч}$. Их перемещения будут соответственно равны $s_1 = 11 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 1,1 \text{ км}$, $s_2 = 9 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 0,9 \text{ км}$, а расстояние между коптерами к моменту разворота будет равно $1,1 \text{ км} + 0,9 \text{ км} = 2 \text{ км}$. После этого первый коптер полетит на юг со скоростью 9 км/ч, второй — на север со скоростью 11 км/ч. Очевидно, разделяющие их 2 км они преодолеют также за 6 минут. До момента встречи первый коптер сместился на север на 1,1 км, а затем на юг на $9 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 0,9 \text{ км}$, оказавшись от точки старта на расстоянии $x_1 = 1,1 - 0,9 = 0,2 \text{ км} = 200 \text{ м}$.

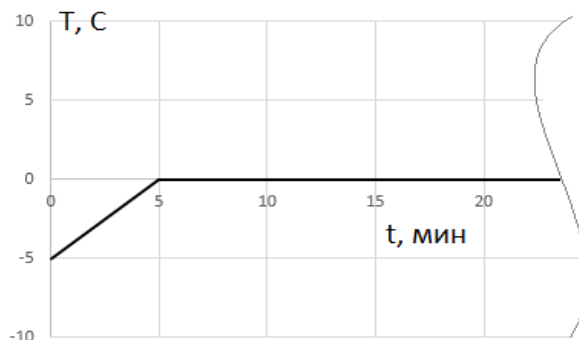
Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс, вариант 101

Теперь рассмотрим случай, если ветер дует с запада на восток. Схема движения коптеров в этом случае приведена на рисунке. Вдоль оси x (направленной с запада на восток) коптеры будут двигаться со скоростью ветра $V = 1$ км/ч, их x -координаты в каждый момент времени будут одинаковыми. Вдоль оси y они будут двигаться с собственными скоростями $u = 10$ км/ч. За первые 6 минут каждый коптер сместится вдоль y на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 1$ км, чтобы встретиться им нужно лететь обратно также в течение 6 минут, общее время движения 12 минут. За это время они пролетят на восток $x_2 = 1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{12}{60} \text{ ч} = 0,2 \text{ км} = 200 \text{ м}$.



Задача 2. Процесс

Экспериментатор Разольюк снимал график зависимости температуры замороженной в тонкостенном пластиковом стаканчике воды от времени. После эксперимента он решил перелить серную кислоту и разлил её на график. Помогите Разольюку восстановить график: Сколько длится прямая, параллельная оси времени? За какое время температура жидкой воды достигнет $+1^\circ\text{C}$? Теплоёмкость льда $2.7 \text{ кДж/кг}\cdot\text{K}$ и воды $4.2 \text{ кДж/кг}\cdot\text{K}$, удельная теплота кристаллизации воды 0.33 МДж/кг .



Решение

В этом процессе мы имеем 3 стадии:

- 1) нагревание льда
- 2) плавление льда
- 3) нагревание жидкой воды

При нагревании льда видно, что наблюдается линейный рост температуры, что свидетельствует о постоянстве мощности нагрева на участке от -5 до 0°C . Значит, мощность

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22

Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс, вариант 101

нагрева жидкой фазы воды на участке от 0 до +1 °С также будет постоянной и равной мощности нагрева льда, а также мощности, получаемой на участке плавления.

$$N_{\text{л}} = N_{\text{п}} = N_{\text{в}}$$

По определению мощность это теплота за единицу времени, поэтому

$$N_{\text{л}} = \frac{Q_{\text{л}}}{t_{\text{л}}} = \frac{c_{\text{л}} m \Delta T_{\text{л}}}{t_{\text{л}}} \text{ — мощность нагрева льда;}$$

$$N_{\text{п}} = \frac{Q_{\text{п}}}{t_{\text{п}}} = \frac{\lambda m}{t_{\text{п}}} \text{ — мощность плавления льда;}$$

$$N_{\text{в}} = \frac{Q_{\text{в}}}{t_{\text{л}}} = \frac{c_{\text{в}} m \Delta T_{\text{в}}}{t_{\text{л}}} \text{ — мощность нагрева воды;}$$

Приравнивая, можем сократить массу, т.к. она постоянна.

$$\frac{c_{\text{л}} \Delta T_{\text{л}}}{t_{\text{л}}} = \frac{\lambda}{t_{\text{п}}} = \frac{c_{\text{в}} \Delta T_{\text{в}}}{t_{\text{л}}}$$

Прямая, параллельная оси времени определяется временем плавления льда, которое находим из:

$$t_{\text{п}} = \frac{\lambda}{c_{\text{л}} \Delta T_{\text{л}}} t_{\text{л}} = \frac{330}{2.7 \cdot 5} \cdot 5 \approx 122 \text{ мин}$$

Далее следует нагревание жидкой воды, которое будет идти до температуры +1°С:

$$t_{\text{в}} = \frac{c_{\text{в}} \Delta T_{\text{в}}}{c_{\text{л}} \Delta T_{\text{л}}} t_{\text{л}} = \frac{4.2 \cdot 1}{2.7 \cdot 5} \cdot 5 \approx 1.5 \text{ мин}$$

Задача 3: Диоксид углерода

Приточная вентиляция, так популярная в крупных городах, подает уличный воздух в квартиру и после перемешивания он выходит через вытяжную вентиляцию. Скорость ее работы, как правило, регулируется автоматикой по датчику CO_2 в помещении. Таня установила требуемый уровень CO_2 в 800 ppm. Он был достигнут и перестал изменяться при скорости потока входящего воздуха в $v = 48 \text{ м}^3/\text{ч}$. Найдите, сколько литров CO_2 в час выдыхает Таня? Какую производительность должна иметь приточная вентиляция, чтобы поддерживать уровень CO_2 в 600 ppm в помещении? Показания газоанализатора на улице составляют 390 ppm.

Примечание: газоанализаторы измеряют объемную долю CO_2 в воздухе в так называемых ppm (parts per million или частей на миллион), что очень удобно для малых концентраций. $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$ объемной доли CO_2 . Воздух в помещении идеально перемешивается, а источником CO_2 служит только человек.

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
 Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс, вариант 101

Решение

Согласно условию, за генерацию CO_2 в помещении отвечает только человек. Воздух, поступающий через приточную вентиляцию, идеально перемешивается, это означает, что если в помещении достигнут уровень 800 ppm, то в выходящем из помещения воздухе объемная доля CO_2 точно такая же.

Внесистемная единица ppm удобна для записи малых объемных долей газа. Чтобы получить объемную долю, нужно умножить показания газоанализатора на 10^{-6} .

Рассмотрим объемы входящего (V_{in}) и выходящего (V_{out}) из помещения газа CO_2 за время t :

$$V_{in} = v \cdot t \cdot 390 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$V_{out} = v \cdot t \cdot 800 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Разницу показаний уровня CO_2 входящего и выходящего воздуха обуславливает Татьяна, а значит для объема выдыхаемого за время t CO_2 (V_h) можно записать соотношение вида:

$$V_h = V_{out} - V_{in} = v \cdot t \cdot (800 - 390) \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Отсюда находим требуемое количество литров в час, не забыв перевести метры кубические в литры:

$$\frac{V_h}{t} = 48 \cdot 410 \cdot 10^{-3} \approx 20 \text{ л/ч}$$

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Зная целевую объемную долю CO_2 в 600 ppm, а также объем CO_2 , выдыхаемый Татьяной в час, определим необходимую производительность вентиляции v .

$$\frac{V_h}{t} = v \cdot (600 - 390) \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Откуда

$$v = \frac{48 \cdot (800 - 390)}{600 - 390} \approx 94 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Задача 4. Несчастный резистор

Резистор $R=3.6$ Ом включен в схему с напряжением 6 В. При включении схемы резистор за короткое время перегрелся и сгорел. Пользуясь графиком зависимости мощности его тепловых потерь от времени, определите:

- Тепловую мощность

резистора в схеме

- Время, за которое он сгорел

Начальная температура резистора 40°C , максимально допустимая температура резистора 100°C . Теплоёмкость резистора 40 Дж/ $^{\circ}\text{C}$.

Решение

Электрическая мощность, переходящая по закону Джоуля-Ленца в тепловую, на резисторе постоянна и равна

$$P_3 = \frac{U^2}{R} = 10\text{Вт}$$

Если построить график выделяемой на резисторе мощности от времени, то это будет прямая линия, параллельная оси времени. Теплота Q , выделяемая на резисторе за некоторое время t , может быть определена, как площадь прямоугольника (площадь под прямой, параллельной оси времени).

Теплота Q , выделяемая на резисторе за некоторое время t , идет как на нагревание самого резистора, так выделяется в окружающую среду в виде теплоты потерь $Q_{\text{п}}$:

$$P_3 t = Q = Q_{\text{п}} + C\Delta T$$

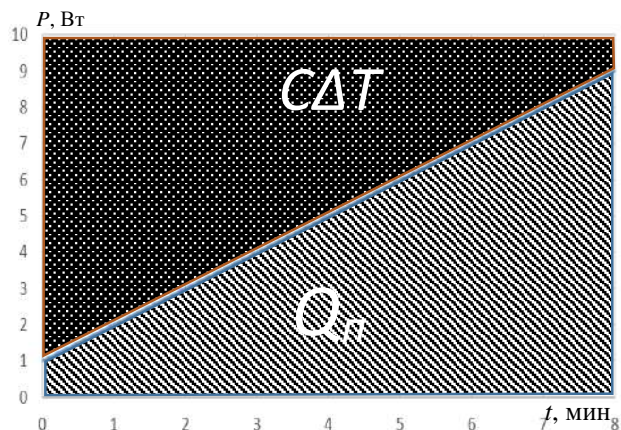
Из графика мощности тепловых потерь от времени можно найти суммарную теплоту потерь $Q_{\text{п}}$ за время t как площадь под графиком линейной функции за это время.

Значит теплота, идущая на нагревание самого резистора,

$$C\Delta T = P_3 t - Q_{\text{п}}$$

может быть посчитана как разность площадей прямоугольника и трапеции в нём, т.е. равна площади “над графиком” тепловых потерь, если провести параллельную оси времени прямую.

Из условия перегорания находим



Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс, вариант 101

$$C\Delta T = 40 \cdot (100 - 40) = 2400 \text{ Дж}$$

Остаётся определить высоту трапеции t , чтобы её площадь была равна 2400 Дж.

$$S = \frac{a + b}{2} t$$

Выразим короткое основание как линейную функцию времени

$$b = a - kt, \text{ где } k = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{мин}}, a = 10 - 1 = 9 \text{ Вт.}$$

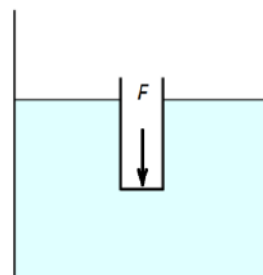
Из уравнения

$$C\Delta T = S = \frac{a + a - kt}{2} t = 2400 \text{ Дж}$$

находим $t=8$ мин.

Задача 5. Непотопляемый напёрсток

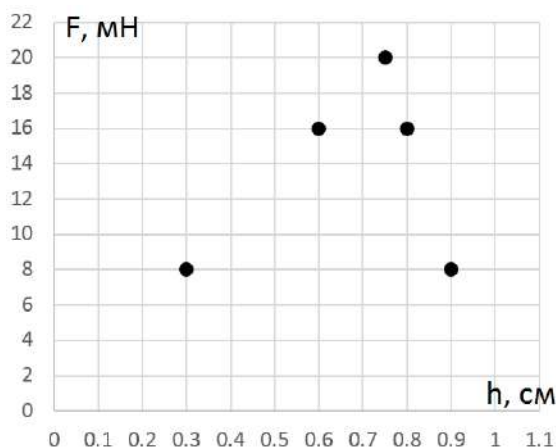
В цилиндрическом стакане с водой у экспериментатора Петра плавает тонкостенный металлический напёрсток высотой 15 мм. Петр начинает топить напёрсток, измеряя динамометром зависимость силы F от перемещения h дна напёрстка относительно стакана. Часть исходных данных потерялась после того, как Петр забыл нанести точки на график.



Помогите Петру вспомнить:

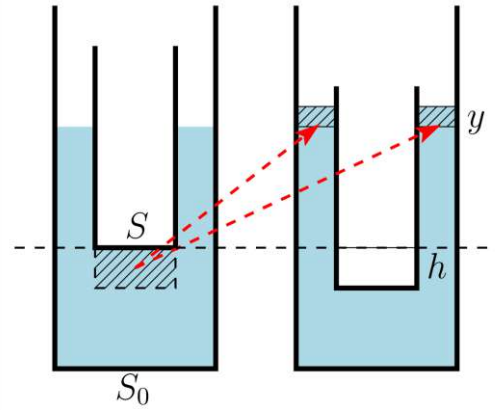
- максимальную силу, приложенную к напёрстку
- после какого перемещения напёрсток утонул
- массу напёрстка
- диаметр напёрстка
- диаметр стакана

Плотность металла напёрстка считайте много больше плотности воды, равной 1 г/см^3 . $g = 10 \text{ м/с}^2$



Решение

Рассмотрим процесс погружения напёрстка. Обозначим площадь дна напёрстка S , стакана — S_0 . Пусть напёрсток сместился к дну стакана на расстояние h , как показано на рисунке. Объём воды (цилиндр высотой h) вытесненный напёрстком, поднимет уровень воды на высоту y



$$Sh = (S_0 - S)y \Rightarrow y = \frac{S}{S_0 - S}h.$$

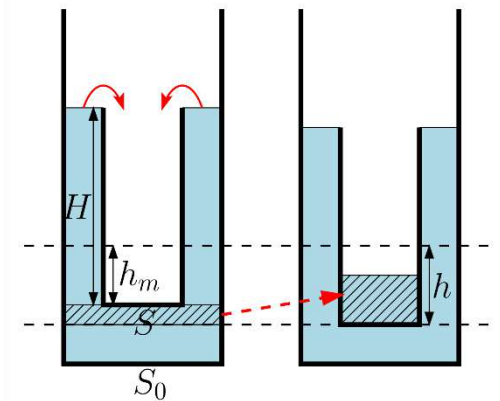
Это приведёт к увеличению выталкивающей силы, действующей на напёрсток, на величину.

$$\Delta F_A = \rho g S(h + y) = \rho g \frac{SS_0}{S_0 - S}h.$$

Силу ровно такой же величины нужно приложить к напёрстку, чтобы удерживать его в равновесии:

$$F_1(h) = \Delta F_A = \rho g \frac{SS_0}{S_0 - S}h. \quad (1)$$

Зависимость приложенной силы от перемещения напёрстка меняется, когда поверхность жидкости доходит до края напёрстка, после чего вода начинает выливаться в напёрсток. Пусть перемещение напёрстка, когда вода только дошла до его края, равно h_m . Напёрсток полностью погружен в воду, на него действует выталкивающая сила $F_{A1} = \rho g SH$, где $H = 15$ мм — высота напёрстка. Объём воды, переливающейся в напёрсток при его смещении на h , равен $\Delta V = S_0(h - h_m)$. Тогда условие равновесия сместившегося напёрстка

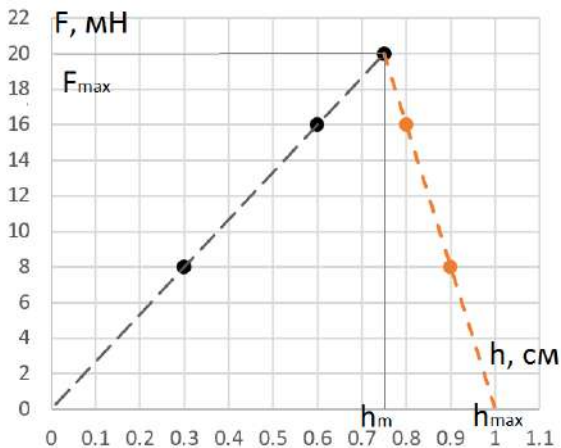


$$F + mg + m_{ж}g = F + mg + \rho g S_0(h - h_m) = F_{A1} = \rho g SH, \quad (2)$$

$$F_2(h) = (\rho g(SH + S_0 h_m) - mg) - \rho g S_0 h.$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 10 класс, вариант 101

Из (1) и (2) видно, что зависимости приложенной силы F от перемещения напёрстка h в обоих случаях линейные. Представленный график легко достроить до двух прямых линий. Из графика определяем $h_m = 0.75$ см, $F_{max} = 20$ мН, а также максимальное перемещение напёрстка $h_{max} = 1$ см, после которого напёрсток начинает тонуть.



Угловым коэффициентом линейной функции для первого участка

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_1 = \rho g \frac{SS_0}{S_0 - S} = \frac{(16 - 8) \cdot 10^{-3} \text{ Н}}{(0,6 - 0,3) \cdot 10^{-2} \text{ м}} = \frac{8 \text{ Н}}{3 \text{ м}}$$

для второго участка

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_2 = -\rho g S_0 = \frac{(8 - 16) \cdot 10^{-3} \text{ Н}}{(0,9 - 0,8) \cdot 10^{-2} \text{ м}} = -8 \frac{\text{ Н}}{\text{ м}}$$

Из последнего равенства легко определить площадь дна стакана S_0 :

$$S_0 = \frac{-\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_2}{\rho g} = \frac{8 \text{ Н/м}}{1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \frac{\pi d_c^2}{4},$$

откуда находим диаметр дна стакана $d_c \approx 3.2$ см. Если поделить $\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_1$ на $-\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_2$, получим

$$\frac{S_0}{S_0 - S} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{S_0}{4} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \frac{\pi d_n^2}{4}, \text{ откуда диаметр напёрстка } d_n \approx 1.6 \text{ см.}$$

Наконец, найдём массу напёрстка. Для этого можно воспользоваться известными из графика значениями h_m или h_{max} , что соответствует моменту утопания напёрстка, когда приложенная сила становится равной нулю.

$$F_2(h_{max}) = \rho g(SH + S_0 h_m) - mg - \rho g S_0 h_{max} = 0.$$

$$m = \rho(SH + S_0(h_m - h_{max})) = 0,001 \text{ кг} = 1 \text{ г.}$$