10 класс

Задача 10.1. Архив Лосяша.

Учёный Лосяш, разбирая архив, нашёл своё старое исследование по баллистике. Там он увидел незаконченный чертёж (рис. 10.1), где на координатной сетке были нанесены три положения тела, брошенного под некоторым углом к горизонту, в различные моменты времени. В подписи к чертежу было указано, что масштаб по обеим осям одинаковый, а ускорение свободного падения направлено вдоль оси y.

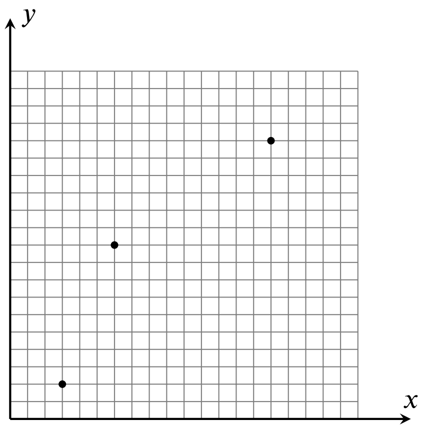

Рис. 10.1.

1. Определите, под каким углом к горизонту направлен вектор скорости в каждой из трёх отмеченных на чертеже точек.
2. Найдите отношение скоростей в левой и правой точках.
Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 1) $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{19}{6} \approx 72{,}5^\circ$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{13}{6} \approx 65{,}2^\circ$, $|\alpha_3| = \operatorname{arctg}\frac{5}{6} \approx 39{,}8^\circ$; 2) 2,55.

Решение: Пронумеруем точки на рисунке слева направо числами от 1 до 3. Пусть s — расстояние, соответствующее одной клетке, v_i — скорость в i-й точке, а T — время, за которое тело перелетело из точки 1 в точку 2.

Так как горизонтальная проекция скорости тела постоянна, из точки 1 в точку 3 тело попадёт за время $4T$. Соответствующие вертикальные проекции перемещения:

$$\Delta y_{12} = 8s = v_{1y}T - \frac{gT^2}{2}, \qquad \Delta y_{13} = 14s = v_{1y}\cdot 4T - \frac{16gT^2}{2}.$$

Из этих формул получаем, что

$$s = \frac{v_{1y}T}{8} - \frac{gT^2}{16} = \frac{2v_{1y}T}{7} - \frac{4gT^2}{7} \quad \Rightarrow \quad v_{1y} = \frac{19gT}{6},\ s = \frac{gT^2}{3}.$$

Проекция скорости тела на горизонтальную ось, следовательно, равна $v_x = 3s/T = gT$. Запишем выражения для вертикальной проекции скорости в точках 2 и 3:

$$v_{2y} = v_{1y} - gT = \frac{13gT}{6}, \qquad v_{3y} = v_{1y} - 4gT = -\frac{5gT}{6}.$$

Отсюда найдём углы наклона вектора скорости:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_{1y}}{v_x} = \frac{19}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{19}{6} \approx 72{,}5^\circ, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{v_{2y}}{v_x} = \frac{13}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{13}{6} \approx 65{,}2^\circ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{v_{3y}}{v_x} = -\frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad |\alpha_3| = \operatorname{arctg}\frac{5}{6} \approx 39{,}8^\circ.$$

Отношение скоростей в первой и третьей точке равно

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{\sqrt{v_{1y}^2 + v_x^2}}{\sqrt{v_{3y}^2 + v_x^2}} = \frac{\sqrt{(19/6)^2 + 1}}{\sqrt{(5/6)^2 + 1}} \approx 2{,}55.$$

Критерии:

1) Время перелёта 1-3 связано со временем перелёта 1-2 или 2-3 . . . . 1 балл
2) Записаны формулы для Δy_{12} и Δy_{13} через T или аналогичный параметр . . . . 2 балла
3) Записаны формулы для v_{2y} и v_{3y} через T или аналогичный параметр . . . . 1 балл
4) Найдены отношения v_{iy}/v_x для всех точек . . . . 1 балл за каждую точку (в сумме 3 балла)
5) Найдены углы α_i . . . . 1 балл
6) Найдено отношение v_1/v_3 или v_3/v_1 . . . . 2 балла

Указания проверяющим:

1) Учащийся может найти время перелёта 2-3 и связать его с временем 1-2 (например). Соответственно, он запишет выражение для Δy_{23}. Если всё сделано верно, баллы за пункты 1 и 2 ставить.
2) Углы могут быть записаны через арктангенсы. В этом случае баллы за пункт 5 ставить.
3) Учащийся может рассмотреть полёт тела не от точки 1 в точку 3, а наоборот, от точки 3 в точку 1. Данный подход полностью равноценен авторскому, но в деталях формул может отличаться. При наличии такого решения можно использовать те же критерии, но с заменой точек $1 \leftrightarrow 3$.
Для контроля: $\Delta y_{32} = -6s = |v_{3y}|\cdot 3T - 9gT^2/2$.

Задача 10.2. Оптика будет!

Луч лазера падает из воздуха на левую (см. рис. 10.2) грань стеклянной призмы под углом $\alpha = 60^\circ$ к её поверхности.
1. Под каким углом β к поверхности правой грани он выйдет из призмы, если при переходе из стекла в воздух преломлённый и отражённый лучи перпендикулярны друг другу?
2. Чему равен преломляющий угол призмы φ?
Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$.

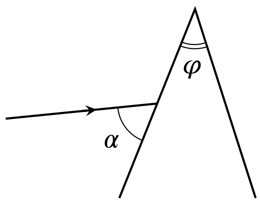

Рис. 10.2.

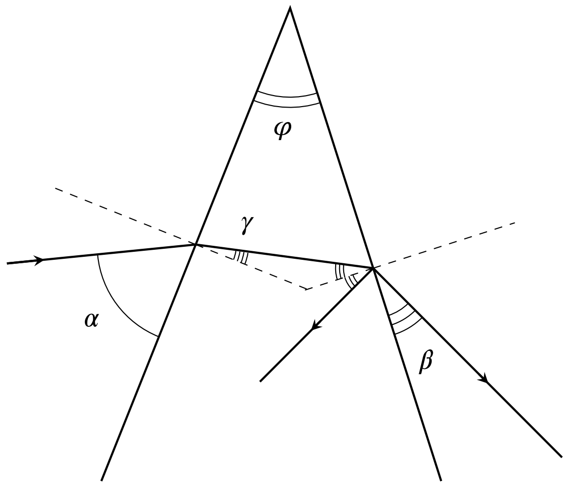

Рис. 10.3.

Ответ: 1) $\beta \approx 32{,}0^\circ$; 2) $\varphi \approx 50{,}2^\circ$.

Решение: Рассмотрим преломление лучи на правой грани призмы. Так как β, по условию, угол между лучом и поверхностью, угол преломления в воздухе равен $90^\circ - \beta$. С другой стороны, при переходе из стекла в воздух преломлённый луч должен быть перпендикулярен отражённому (см. рис. 10.3). Отсюда следует, что угол падения луча на правую грань призмы равен β. По закону преломления

$$\frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \operatorname{arctg}\frac{5}{8} \approx 32{,}0^\circ.$$

Пусть γ — угол преломления на левой грани. По закону преломления

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin\gamma} = n \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{n} = \frac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\frac{1}{2n} = \arcsin\frac{5}{16} \approx 18{,}2^\circ.$$

Сумма углов в треугольнике, образованном гранями призмы и идущим в стекле лучом, равна 180°. Поэтому

$$(90^\circ - \gamma) + \varphi + (90^\circ - \beta) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = \gamma + \beta \approx 50{,}2^\circ.$$

Критерии:

1) Записан закон преломления для левой грани . . . . 1 балл
2) Найден угол преломления γ . . . . 1 балл
3) Записана формула $\operatorname{tg}\beta = 1/n$ или её аналог . . . . 3 балла
4) Найден угол преломления β . . . . 1 балл
5) Записано условие, связывающее φ с γ и β . . . . 3 балла
6) Найдено значение преломляющего угла φ . . . . 1 балл

Указание проверяющим: Углы могут быть записаны в виде $\beta = \operatorname{arctg}(5/8)$, $\gamma = \arcsin(5/16)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(5/8) + \arcsin(5/16)$. В этом случае баллы за пункты 2, 4 и 6 (соответственно) ставить.

Задача 10.3. Тянем-потянем.

Какова сила натяжения нити, перекинутой через блок, в системе, изображённой на рис. 10.4, если масса верхнего груза равна $m = 200$ г, масса нижнего $M = 800$ г, сила $F = 2{,}5$ Н, а коэффициент трения между грузами $\mu = 0{,}25$? Трение между нижним грузом и горизонтальной поверхностью, на которой он находится, отсутствует. Нити считать горизонтальными, невесомыми и нерастяжимыми. Массой блока и трение в его оси пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

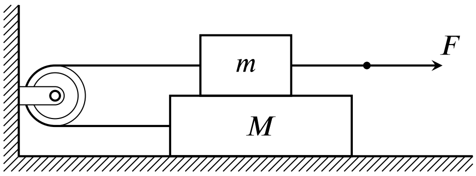

Рис. 10.4.

Ответ: 1,7 Н.

Решение: Пусть a — ускорение грузов (у верхнего оно направлено вправо, а у нижнего — влево), а T — искомая сила натяжения нити.

Предположим, что $a > 0$. Тогда грузы движутся друг по другу, и сила трения равна $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Запишем 2-й закон Ньютона для обоих грузов:

$$ma = F - T - \mu mg \quad \text{(верхний груз)},$$

$$Ma = T - \mu mg \quad \text{(нижний груз)}.$$

Отсюда следует, что

$$(m + M)a = F - 2\mu mg = 2{,}5\ \text{Н} - 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0,$$

то есть наше предположение верно. Найдём силу натяжения T:

$$\frac{m}{M} = \frac{F - T - \mu mg}{T - \mu mg} \quad \Rightarrow \quad (m + M)T + (M - m)\mu mg = MF \quad \Rightarrow \quad T = \frac{MF - (M - m)\mu mg}{m + M} = 1{,}7\ \text{Н}.$$

Критерии:

1) Указано, что силы трения, действующие на оба груза, одинаковы по модулю . . . . 1 балл
2) Записан 2-й закон Ньютона для верхнего груза . . . . 3 балла
3) Записан 2-й закон Ньютона для нижнего груза . . . . 2 балла
4) Обосновано, что сила трения достигает максимального значения . . . . 1 балл
5) Формула $F_{\text{тр}} = \mu mg$ . . . . 1 балл
6) Найдено значение T . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Указание может быть сделано на чертеже или сразу в записи 2-го закона Ньютона. В этих случаях балл за пункт 1 ставится.
2) Обоснование, что сила трения равна силе трения скольжения (пункт 4), может отличаться от авторского. Например, достаточно предъявить числовое значение ускорения. Остальные пункты критериев оцениваются независимо.
3) Если пункт 1 отсутствует, балл за пункт 5 критериев не ставить!
4) Если в пункте 6 числовое значение T неверное, но учащийся записал правильную конечную формулу для подсчёта T, за пункт 6 ставить 1 балл из 2.

Задача 10.4. Нагрев проводников.

У экспериментатора Иннокентия Иванова есть три цилиндрических проводника, сделанных из одного и того же тугоплавкого материала (размеры указаны на рис. 10.5), к торцам которых он по очереди подключает источник постоянного напряжения. Когда Иннокентий подключил источник к проводнику №1, тот нагрелся до температуры 120 ℃. Второй проводник смог нагреться уже до 280 ℃. До какой температуры сможет нагреться проводник №3? Температура воздуха в комнате равна $t_0 = 20\,℃$. Удельное сопротивление материала зависит от его температуры t по закону $\rho = \rho_0(1+\alpha(t-t_0))$, где ρ_0 — удельное сопротивление при комнатной температуре t_0, а α — некоторый коэффициент. Считать, что мощность теплоотдачи от проводника пропорциональна разности температур между ним и воздухом, а также площади его **боковой** поверхности.

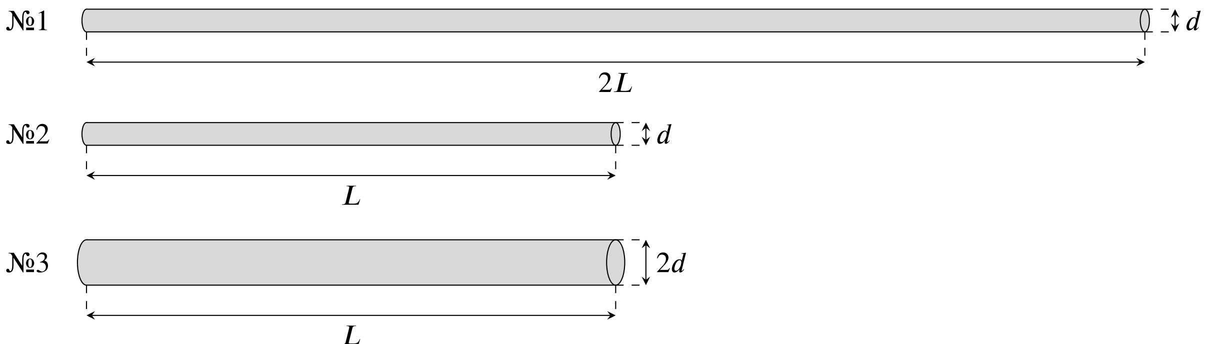

Рис. 10.5.

Ответ: 420 ℃.

Решение: Пусть U — напряжение на выводах источника. Тепловая мощность, выделяющаяся в проводнике длины l и диаметром d, нагревшемся до температуры t, равна

$$P_{\text{эл}} = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 S}{\rho l} = \frac{\pi d^2 U^2}{4l\rho_0(1+\alpha(t-t_0))}.$$

Так как площадь боковой поверхности проводника $S_{\text{бок}} = \pi d l$, мощность теплоотдачи от такого проводника равна $P_{\text{отд}} = k\cdot \pi d l(t-t_0)$, где k — коэффициент пропорциональности. Если t — установившаяся температура, то вся мощность, выделяемая в проводнике, должна отдаваться воздуху, поэтому

$$P_{\text{эл}} = P_{\text{отд}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi d^2 U^2}{4l\rho_0(1+\alpha(t-t_0))} = k\cdot\pi d l(t-t_0) \quad\Rightarrow\quad \frac{U^2 d}{4kl^2} = (t-t_0)\cdot\big(1+\alpha(t-t_0)\big).$$

В случаях №1 и №2 длина $l_1 = 2L$, $l_2 = L$, диаметры одинаковы, а температуры равны $t_1 = 120\,℃$ и $t_2 = 280\,℃$. Подставляя данные, получаем

$$\begin{cases} U^2 d/(16kL^2) = 100\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 100\,℃), \\ U^2 d/(4kL^2) = 260\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 260\,℃) \end{cases} \Rightarrow\ 260\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 260\,℃) = 4\cdot 100\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 100\,℃)\ \Rightarrow\ \alpha\approx 0{,}005\,℃^{-1}.$$

В третьем случае $l_3 = L$, а диаметр равен $2d$, поэтому

$$U^2\cdot 2d/(4kL^2) = (t_3-t_0)\cdot\big(1+\alpha\cdot(t_3-t_0)\big)\ \Rightarrow\ 8\cdot 100\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 100\,℃) = (t_3-t_0)\cdot\big(1+\alpha\cdot(t_3-t_0)\big).$$

Подставляя значение α, получаем

$$0{,}005\,℃^{-1}\cdot(t_3-t_0)^2 + (t_3-t_0) = 1200\,℃ \quad\Rightarrow\quad t_3 - t_0 = (-1\pm 5)/(0{,}01)\,℃.$$

Отбрасывая нефизический отрицательный корень, находим, что $t_3 = t_0 + 400\,℃ = 420\,℃$.

Критерии:

1) Записано выражение для $P_{\text{эл}}$ через ρ_0, t и размеры в каком-либо случае (или в общем случае) . . . . 1 балл
2) Записано выражение $P_{\text{отд}} = kS_{\text{бок}}(t-t_0)$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записано выражение для $S_{\text{бок}}$ в каком-либо случае (или в общем случае) . . . . 1 балл
4) Записано равенство $P_{\text{эл}} = P_{\text{отд}}$ для каждого проводника . . . . 1 балл за каждый случай (в сумме 3 балла)
5) Найден тепловой коэффициент α . . . . 2 балла
6) Найдена температура t_3 . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Учащийся может записывать выражения не для мощностей, а для теплот, сразу умножая мощности на некоторое общее время. В случае верно написанных формул баллы ставить по соответствующим пунктам критериев в полном объёме.
2) Если учащийся сразу записывает верное выражение для $P_{\text{отд}}$ с уже подставленной $S_{\text{бок}} = \pi l d$ (или аналогом для нужного ему случая), баллы за пункт 2 ставить автоматически.
3) В пункте 4 принимать только уравнения в «расшифрованном» виде, с подставленными выражениями для мощностей.
4) Если учащийся сразу пишет верные формулы для $P_{\text{эл}}$ и/или $P_{\text{отд}}$ внутри уравнений из пункта 4, баллы за пункты 2,3 и/или 1 ставить автоматически.
5) В зависимости от степени округления значения α, ответ в пункте 6 может незначительно отличаться (419 − 421 ℃).

Задача 10.5. Равновесие изогнутого стержня.

Тонкий однородный стержень массой M, согнутый под прямым углом, шарнирно закреплён на опоре так, что в положении равновесия его длинная часть является горизонтальной (рис. 10.6). Груз какой массы m нужно подвесить к левому концу стержня, чтобы в новом положении равновесия его длинная часть образовала угол α с горизонтом? Длина короткой части (на рис. 10.6 она расположена вертикально) равна одной трети длины всего стержня. Трение в шарнире отсутствует.

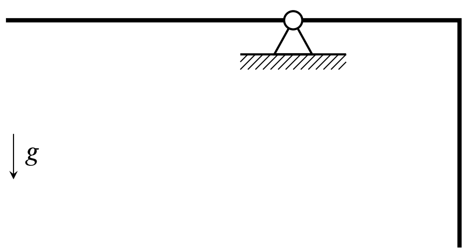

Рис. 10.6.

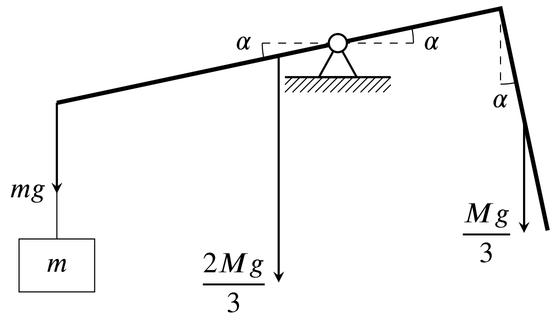

Рис. 10.7.

Ответ: $M/8 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Решение: Рассмотрим равновесие стержня без груза. Пусть L — длина вертикальной части стержня, $2L$ — длина оставшейся (горизонтальной) части. Запишем правило моментов относительно шарнира и найдём расстояние x от центра тяжести горизонтальной части до шарнира:

$$\frac{2Mg}{3} \cdot x = \frac{Mg}{3} \cdot (L - x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{3}.$$

Рассмотрим теперь правило моментов относительно шарнира для стержня с грузом:

$$mg \cdot (L + x)\cos\alpha + \frac{2Mg}{3} \cdot x\cos\alpha = \frac{Mg}{3} \cdot \left((L - x)\cos\alpha + \frac{L}{2}\sin\alpha\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4mgL\cos\alpha}{3} + \frac{2MgL\cos\alpha}{9} = \frac{MgL}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M\operatorname{tg}\alpha}{8}.$$

Критерии:

1) Записано правило моментов относительно шарнира в первом случае . . . . 2 балла
2) Найдено смещение центра масс длинной части стержня относительно шарнира . . . . 2 балла
3) Записано правило моментов во втором случае . . . . 4 балла
4) Найдено значение m . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 1 учащийся может рассмотреть отдельно силы тяжести на левый и правый кусок горизонтальной части стержня. Если всё сделано верно, баллы за пункт 1 ставить.
2) В пункте 2 учащийся может найти иной параметр, характеризующий смещение стержня относительно шарнира (не обязательно x).
3) Поиск центра масс (ЦМ) **всего** стержня соответствует пункту 1 критериев. Если он выполнен верно (достаточно его положения по горизонтали), ставить полный балл за этот пункт. Для ориентировки, ЦМ всего стержня находится на расстоянии $2L/3$ левее и на расстоянии $L/6$ ниже его угла.
4) Учащийся может указать, что ЦМ **всего** стержня находится точно под шарниром. Если положение ЦМ уже верно определено, то за данное утверждение ставить полный балл в пункте 2.
5) Если это утверждение сделано, но положение центра масс не определено, то за пункт 2 ставить 1 балл из 2, а за пункт 1 баллы не ставить.

Максимально возможный балл в 10 классе 50