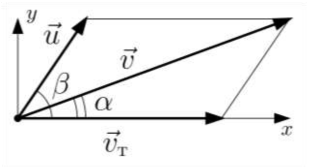
Всероссийская олимпиада школьников по физике 2021/22
Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс, вариант 111

Задача 1. Быстрая река

Пловец хочет по прямой переплыть реку, скорость течения которой в два раза больше скорости пловца относительно воды. Каким должен быть угол между траекторией пловца и направлением течения, если пловец хочет как можно скорее попасть на соседний берег? Каков максимально возможный угол между траекторией пловца и течением?

Решение



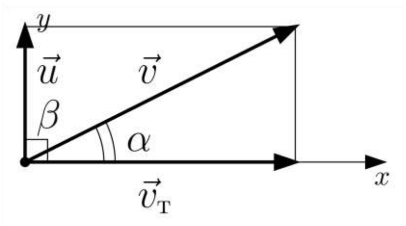
Обозначим вектор собственной скорости пловца как $\vec{u}$, скорости течения $\vec{v}_т$. По условию $v_т = 2u$. По закону сложения скоростей скорость пловца относительно земли составит

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_т.$$

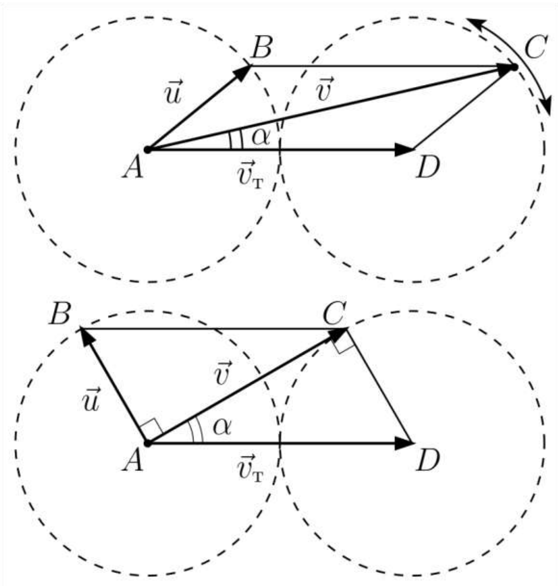
Введём систему координат, как показано на рисунке. Угол α между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v}_т$— искомый угол между траекторией пловца и направлением течения, а угол β -— угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}_т$. Скорость пловца относительно земли имеет компоненты $v_x = u\,cos\,\beta + v_т, v_y = u\,sin\,\beta$.

Пусть ширина реки равна L. Тогда время, за которое он достигнет другого берега,

$$t = \frac{L}{v_y} = \frac{L}{u\ \ sin\,\beta}.$$



Очевидно, это время будет наименьшим, если $sin\,\beta$ принимает наибольшее возможное значение, т.е. $\beta = 90°$, собственная скорость пловца $\vec{u}$ должна быть перпендикулярна скорости течения. В этом случае $tg\,\alpha = \frac{u}{v_т} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2}$, $\alpha = arctg\ \frac{1}{2} \approx 26,6°$.



Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим, как будет меняться угол α при различных направлениях вектора скорости пловца $\vec{u}$. Угол β может меняться от 0 до 180°, конец вектора при этом будет описывать половину окружности. Если выполнить сложение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}_т$ по правилу параллелограмма, то вершина C

параллелограмма ABCD также будет двигаться по окружности вокруг точки D, а искомый угол α — угол между диагональю AC параллелограмма и его длинной стороной. Очевидно, что этот угол примет наибольшее значение, если диагональ AC будет отрезком на касательной к окружности. В этом случае угол ∠ACD = ∠BAC = 90°.

Найдём угол α из прямоугольного треугольника ACD:

$$sin\ \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{u}{v_т} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2},\ \alpha = arcsin\frac{1}{2} = 30°.$$

Альтернативное решение второй части задачи

Участники, знакомые с понятием производной, могут решить данную задачу, воспользовавшись процедурой нахождения экстремума функции. Вернёмся к координатной системе, введенной в первой части задачи. Зная компоненты вектора $\vec{v}$, найдём

$$tg\ \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{u\ sin\ \beta}{u\ cos\ \beta + v_т} = \frac{u\ sin\ \beta}{u\ cos\ \beta + 2u} = \frac{sin\ \beta}{cos\ \beta + 2}.$$

Поскольку при $0° \leq \alpha < 90°$тангенс угла α монотонно возрастает, достаточно найти производную функции $tg\ \alpha$ по углу β и приравнять эту производную к нулю.

$$(tg\ \alpha)'_\beta = \left(\frac{sin\ \beta}{cos\ \beta + 2}\right)' = \frac{cos\ \beta(cos\ \beta + 2) + sin^2\ \beta}{(cos\ \beta + 2)^2} = \frac{1 + 2\ cos\ \beta}{(cos\ \beta + 2)^2} = 0.$$

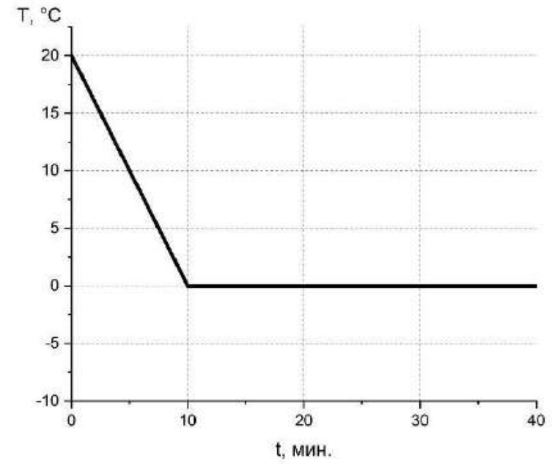
$$cos\ \beta = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $0 \leq \beta \leq 180°$, получаем $\beta = 120°$.

Находим искомый угол α:

$$\alpha = arctan\frac{sin\ 120°}{cos\ 120° + 2} = arctan\frac{\sqrt{3}}{2(-0{,}5 + 2)} = arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°.$$

Задача 2: Обратный процесс



Гриша тестирует новую охлаждающую установку. Для этого он поместил внутрь камеры маленький тонкостенный стаканчик с водой и начал измерять температуру внутри стаканчика от времени. Полученные значения он записывал в таблицу, но при создании графика он обнаружил, что потерял лист с частью данных. Помогите Грише восполнить потерянные данные по имеющемуся графику: определите момент времени, когда температура станет отрицательной. Найдите максимальный по модулю темп охлаждения $\frac{\Delta T}{\Delta t}$. Теплоёмкость льда 2.7 кДж/кг·К и воды 4.2 кДж/кг·К, удельная теплота плавления льда 0.33 МДж/кг.

Решение

а) В этом процессе мы имеем 3 стадии:

1) охлаждение жидкой воды
2) кристаллизация (отвердевание) воды в лёд
3) охлаждение льда

При охлаждении воды видно, что наблюдается линейное падение температуры, что свидетельствует о постоянстве мощности охлаждения на участке от +20°C до 0°C. Значит, мощность охлаждения на всех участках процесса будет постоянной и равной мощности охлаждения воды.

$$N_в = N_к = N_л$$

По определению мощность это теплота за единицу времени, поэтому

$N_в = \frac{Q_в}{t_в} = \frac{c_в m(T_2 - T_1)}{t_в} = -\frac{c_в m \Delta T_в}{t_в}$— мощность охлаждения воды;

$N_к = \frac{Q_к}{t_к} = -\frac{\lambda \ m}{t_к}$— мощность кристаллизации льда;

$N_л = \frac{Q_л}{t_л} = \frac{c_л m(T_4 - T_3)}{t_л} = -\frac{c_л m \Delta T_л}{t_л}$— мощность охлаждения льда;

Приравнивая, сократим массу, т.к. она постоянна

$$\frac{c_в \Delta T_в}{t_в} = \frac{\lambda}{t_к} = \frac{c_л \Delta T_л}{t_л} \qquad (1)$$

Отрезок, идущий вдоль T=0°C, определяется временем кристаллизации льда, которое находим из (1):

$$t_к = \frac{\lambda}{c_в \Delta T_в} t_в = \frac{330\ кДж/кг}{4.2\ кДж/кг \cdot К \cdot 20°C} \cdot 10\ мин \simeq 39\ мин$$

Значит, прямая начнет опускаться ниже T=0°C в момент времени:

$$t_{к+в} = t_в + t_к = 10 + 39 = 49\ мин$$

б) Из графика видно, что для охлаждения воды на ΔT=20°C требуется 10 минут, зависимость линейная. Тогда по модулю $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 2°C/мин$

На участке кристаллизации изменения температуры не происходит, $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 0$.

Для участка охлаждения льда из (1) находим

$$\frac{\Delta T_л}{\Delta t_л} = \frac{с_в}{с_л} \frac{\Delta T_в}{\Delta t_в} = \frac{4.2\ кДж/кг{\cdot}К}{2.7\ кДж/кг{\cdot}К} \frac{20°\square}{10\ мин} \approx 3.11°C/мин$$

Сравнив темп охлаждения трёх участков, определяем, что максимальный темп охлаждения $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 3.11°C/мин$

Задача 3: Ёмкий тэн

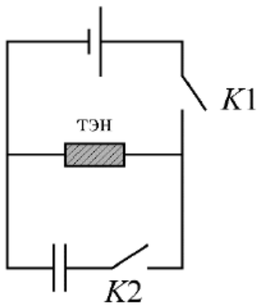


Схема состоит из двух ключей, идеального источника ЭДС, конденсатора и тэна (нагревательного элемента) с сопротивлением $R = 2$ Ом, который погружен в емкость с теплоизолированными стенками. Перед каждым экспериментом в емкость наливают одинаковое количество жидкости температуры $T_0 = 20°C$, конденсатор исходно разряжен. Сначала оба ключа разомкнуты. В первом эксперименте ключ К1 замкнули на $t_1 = 10$ секунд, температура жидкости после этого составила $T_1 = 40°C$. Во втором эксперименте сначала замкнули К2, а затем вновь на $t_1 = 10$ секунд ключ К1, в этом случае жидкость нагрелась до $T_2 = 41$ °C. Определите емкость конденсатора. До какой температуры нагреется жидкость в третьем эксперименте, когда при замкнутом ключе К2 исследователи замкнут ключ К1 уже на $t_2 = 20$ секунд?

Решение

Рассмотрим первый эксперимент. Мы не знаем напряжение источника ЭДС (U), а также массу (m) и теплоемкость (c) налитой жидкости. Запишем уравнение теплового баланса и закон Джоуля — Ленца:

$$\frac{U^2 t_1}{R} = c \cdot m \cdot (T_1 - T_0) \qquad (1)$$

Пользуясь тем фактом, что ЭДС источника, а также теплоёмкость жидкости и ее масса не меняются от эксперимента к эксперименту, выразим их через известные нам величины:

$$\frac{c \cdot m}{U^2} = \frac{t_1}{R \cdot (T_1 - T_0)}$$

Во втором эксперименте, когда ключ К2 замкнут и параллельно тэну подключен конденсатор с неизвестной электроёмкостью C_k, на тэне после отключения ключом К1 источника ЭДС будет дополнительное тепловыделение от энергии, запасенной в конденсаторе. Запишем уравнение теплового баланса для этого случая:

$$\frac{U^2 t_1}{R} + \frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_0) = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1) + c \cdot m \cdot (T_1 - T_0) \qquad (2)$$

Если вычесть из уравнения (2) уравнение (1), то получится:

$$\frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

Определим емкость конденсатора из данного выражения:

$$C_k = \frac{2c \cdot m}{U^2}(T_2 - T_1) = \frac{2t_1}{R \cdot (T_1 - T_0)}(T_2 - T_1)$$

Подставим числа и получим:

$$C_k = \frac{20}{2 \cdot (40-20)}(41 - 40) = 0.5\text{Ф}$$

Вычислим итоговую температуру для третьего эксперимента, когда тэн с конденсатором были включены $t_2 = 20$ секунд. Запишем уравнение теплового баланса:

$$\frac{U^2 t_2}{R} + \frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T - T_0)$$

Откуда:

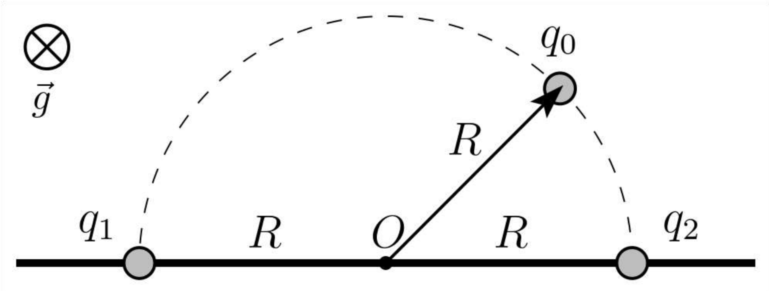
$$T = T_0 + \frac{U^2 \cdot t_2}{c \cdot m \cdot R} + \frac{C_k U^2}{2c \cdot m} = T_0 + \frac{t_2}{t_1}(T_1 - T_0) + T_2 - T_1$$

Подставим числа и получим:

$$T = 20 + 20 \cdot 2 + 41 - 40 = 61°\text{C}$$

Второй вариант решения для третьего эксперимента: нагрев длительностью $t_1 = 10$ секунд без конденсатора приводит к разнице температур в 20 °С, а следовательно, при $t_2 = 20$ секунд разница температур составит 40 °С. Энергия полностью заряженного конденсатора приводит к дополнительной разнице температур в 1 °С и одинакова, как дляt_1, так и для t_2. Просуммировав, получим разницу температур в 41 °С, а следовательно температура жидкости будет 61 °С.

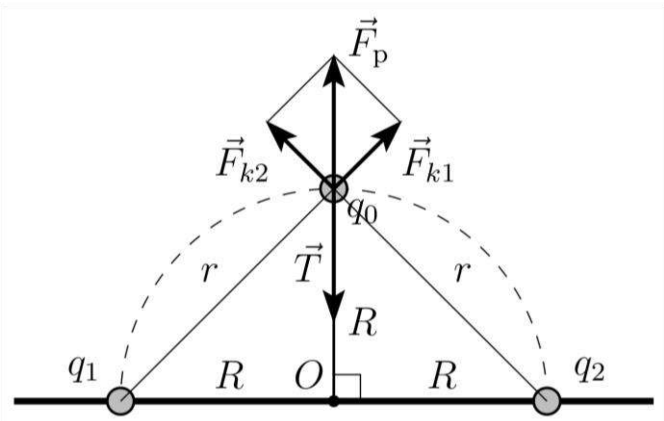
Задача 4. Электросчётчик



Петя разработал следующее устройство для измерения отношений электрических зарядов. Два небольших заряженных шарика с одноимёнными зарядами q_1 и q_2 закреплены на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии $2R$ друг от друга, а третий заряд q_0, лежащий на этой же поверхности, на нити длиной R прикреплен к точке O — используется как стрелка. При каком отношении зарядов шариков q_1/q_2 стрелка была под прямым углом к линии, соединяющей заряды? Под углом 45°, как показано на рисунке? Массами шариков можно пренебречь.

Решение

Рассмотрим первый случай. Чтобы нить была натянута, заряд q_0 должен иметь такой же знак, как и q_1 и q_2. Покажем в этом случае силы, действующие на заряд q_0.

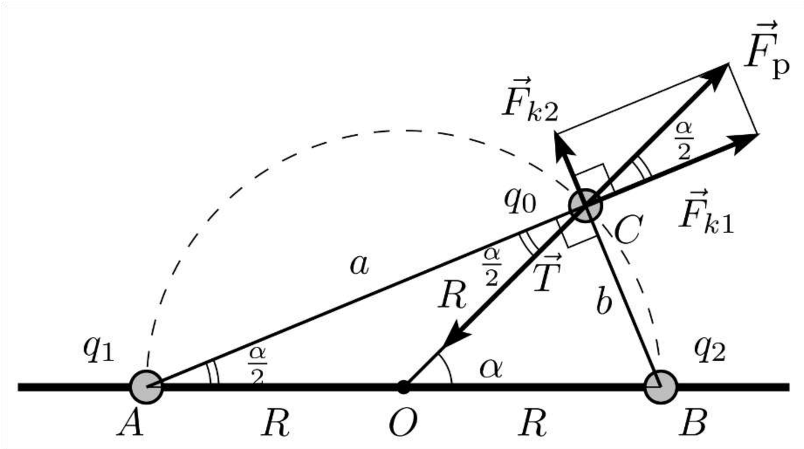


Равнодействующая $F_р$ сил Кулона F_{k1} и F_{k2} должна быть направлена противоположно силе натяжения нити T, чтобы уравновесить её. Очевидно, в этом случае силы Кулона должны быть равны друг другу:

$$F_{k1} = F_{k2} = \frac{kq_1q_0}{r^2} = \frac{kq_2q_0}{r^2}.$$

В результате получаем, что в первом случае заряды равны друг другу: $q_1/q_2 = 1$.

Рассмотрим случай, когда нить находится под произвольным углом α к линии, соединяющей заряды q_1 и q_2. Отметим, что точечные заряды q_0, q_1 и q_2образуют прямоугольный треугольник ABC, как вписанный в окружность треугольник, опирающийся на диаметр.



Силы Кулона F_{k1} и F_{k2} также будут перпендикулярны друг другу. Обозначим угол $\angle BOC = \alpha = 45°$. Тогда вписанный угол $\angle BAC = \alpha/2$. Пользуясь свойствами равнобедренных треугольников AOC и BOC, отметим углы, равные $\alpha/2$, как показано на рисунке. Тогда

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{F_{k2}}{F_{k1}}.$$

По закону Кулона

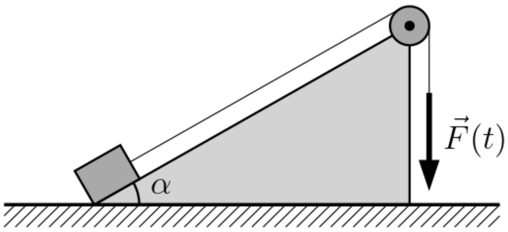
$$F_{k1} = \frac{kq_1q_0}{a^2},\ \ F_{k2} = \frac{kq_2q_0}{b^2}.$$

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{q_2}{q_1}\frac{a^2}{b^2}.$$

Из прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AB = 2R$ найдём его катеты $a = 2R\ cos\frac{\alpha}{2}$, $\ b = 2R\ sin\frac{\alpha}{2}$. В итоге получим

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{q_2}{q_1}\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{q_2}{q_1}\frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{q_1}{q_2} = ctg^3\frac{\alpha}{2} = \left(ctg\frac{45°}{2}\right)^3 \approx 14.$$

Задача 5. Подъёмник

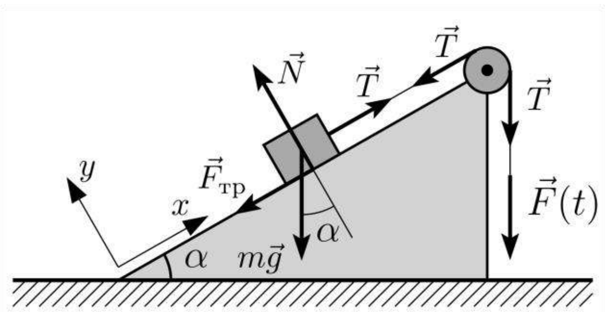


В рамках разработки нового двигателя для грузового подъёмника провели следующий эксперимент. Некоторый груз поднимали по наклонной плоскости, закреплённой под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, как показано на рисунке. Модуль силы $\vec{F}$, с которой понимали груз, зависел от времени по закону $F(t) = kt$, где коэффициент $k = 10$ Н/с. В таблице приведена измеренная зависимость ускорения груза от времени. Определите, в какой момент t_0 груз начал своё движение. Чему равнялись масса груза m и коэффициент трения μ между грузом и плоскостью?

t, с	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
a, м/с^2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,25	3,75

Считайте трос нерастяжимым и невесомым, блок также невесомым, трение в блоке отсутствует, ускорение свободного падения можно принять за 10 м/с^2.

Решение



Покажем силы, действующие на груз, введём систему координат и запишем основное уравнение динамики для поднимающегося груза.

$$ma = -mg\,sin\,\alpha + T - F_{\text{тр}},$$

$$0 = N - mg\,cos\,\alpha.$$

Из условия невесомости троса и блока и отсутствия сил трения в блоке следует равенство силы натяжения троса и приложенной силы: $T = F(t) = kt$. Тогда

$$ma = -mg\,sin\,\alpha + kt - F_{\text{тр}}.$$

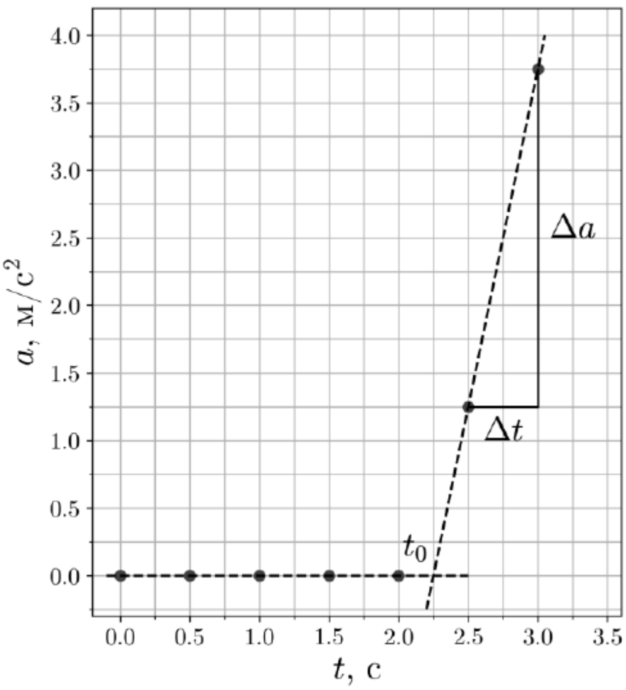
В этом уравнении в качестве силы трения может выступать сила трения покоя, и в этом случае груз не будет смещаться, его ускорение будет равно нулю: $a = 0$. Либо $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\,cos\,\alpha$ — сила трения скольжения, груз поднимается, и тогда уравнение движения груза примет вид

$$ma = -mg\,sin\,\alpha + kt - \mu mg\,cos\,\alpha.$$

В этом случае ускорение груза можно найти как

$$a = \frac{k}{m}t - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Во всяком случае, ускорение груза либо равно нулю, либо линейно зависит от времени. Чтобы найти момент начала движения t_0 достаточно нанести все точки из таблицы на график, провести через них две прямые линии, как показано на рисунке, и найти их точку пересечения. Получаем $t_0 = 2{,}25$ с.



Для нахождения массы груза рассмотрим участок линейного возрастания ускорения. Угловой коэффициент функции $a(t)$ на этом участке равен $\frac{k}{m}$, для его нахождения можно найти отношение изменения ускорения Δa к величине соответствующего промежутка времени Δt, например, между последними двумя точками из таблицы.

$$\frac{k}{m} = \frac{\Delta a}{\Delta t}.$$

$$m = \frac{k\Delta t}{\Delta a} = \frac{10 \cdot (3 - 2{,}5)}{3{,}75 - 1{,}25} = 2 \text{ кг}.$$

Коэффициент трения можно из найденного значения момента начала движения груза. В момент начала движения ускорение груза равно нулю:

$$0 = \frac{k}{m}t_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\frac{kt_0}{mg} - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Тогда получаем

$$\mu = \frac{\frac{10 \cdot 2.25}{2 \cdot 10} - \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \approx 0{,}72.$$

Также возможен полностью аналитический вариант решения задачи. Для этого рассмотрим две последние точки в таблице. Обозначим соответствующие моменты времени за t_1, t_2, ускорения груза — a_1, a_2. Получим систему уравнений

$$a_1 = \frac{k}{m} t_1 - g(sin\, \alpha + \mu\, cos\, \alpha),$$

$$a_2 = \frac{k}{m} t_2 - g(sin\, \alpha + \mu\, cos\, \alpha).$$

Решая эту систему, получим выражения для массы груза:

$$m = \frac{k(t_2 - t_1)}{a_2 - a_1} = 2\ \text{кг},$$

и для коэффициента трения:

$$\mu = \frac{a_1 t_2 - a_2 t_1 + g\, sin\, \alpha (t_2 - t_1)}{g(t_1 - t_2)\, cos\, \alpha} \approx 0{,}72.$$

Получив эти значения, можно найти t_0:

$$0 = \frac{k}{m} t_0 - g(sin\, \alpha + \mu\, cos\, \alpha), \quad t_0 = \frac{mg}{k}(sin\, \alpha + \mu\, cos\, \alpha) = 2{,}25\ \text{с}.$$