11 класс

Задача 11.1. Одновременное падение.

Из одной точки на земле одновременно брошены два тела: первое — под углом $\alpha = 30^\circ$, второе — под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту. Определите начальные скорости тел, если они одновременно упали обратно на землю на расстоянии $\Delta L = 4$ м друг от друга. Рассмотрите все возможные варианты, считая, что траектории движения обоих тел лежат в одной плоскости. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать, а поверхность земли считать горизонтальной.

Ответ: $\upsilon_1 = 8{,}3$ м/с, $\upsilon_2 = 4{,}8$ м/с или $\upsilon_1 = 3{,}4$ м/с, $\upsilon_2 = 5{,}9$ м/с.

Решение: Пусть υ_1 — скорость первого тела, а υ_2 — скорость второго. Так как они приземляются одновременно, времена их полёта равны:

$$t_1 = t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\upsilon_1 \sin\alpha}{g} = \frac{2\upsilon_2 \sin\beta}{g} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 \sin 30^\circ = \upsilon_2 \sin 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \upsilon_2\sqrt{3}.$$

Рассмотрим первый вариант, когда точки падения тел находятся по одну сторону от точки старта. В данной случае дальности полёта отличаются на ΔL:

$$\Delta L = L_1 - L_2 = \frac{\upsilon_1^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{\upsilon_2^2 \sin 2\beta}{g} = \frac{\sqrt{3}\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right)}{2g} = \frac{\sqrt{3}\upsilon_2^2}{g}.$$

Отсюда получаем, что

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{g\Delta L}{\sqrt{3}}} \approx 4{,}8 \text{ м/с}, \qquad \upsilon_1 = \sqrt{3}\cdot\upsilon_2 \approx 8{,}3 \text{ м/с}.$$

Теперь рассмотрим второй вариант, когда точки падения тел находятся по разные стороны от точки старта. Здесь

$$\Delta L = L_1 + L_2 = \frac{\upsilon_1^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{\upsilon_2^2 \sin 2\beta}{g} = \frac{\sqrt{3}\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2\right)}{2g} = \frac{2\sqrt{3}\upsilon_2^2}{g}.$$

Отсюда

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{g\Delta L}{2\sqrt{3}}} \approx 3{,}4 \text{ м/с}, \qquad \upsilon_1 = \sqrt{3}\cdot\upsilon_2 \approx 5{,}9 \text{ м/с}.$$

Критерии:

1) Записана формула для времени полёта для каждого тела . . . . 1 балл
2) Записано условие равенства времён полёта . . . . 1 балл
3) Найдена связь между скоростями $\upsilon_1 = \upsilon_2\sqrt{3}$ или её аналог . . . . 2 балла
4) Получена связь между ΔL и одной из скоростей υ_1 (или υ_2) в первом случае . . . . 2 балла
5) Получена связь между ΔL и одной из скоростей υ_1 (или υ_2) во втором случае . . . . 2 балла
6) Найдены скорости υ_1 и υ_2 в первом случае . . . . 1 балл
7) Найдены скорости υ_1 и υ_2 во втором случае . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

В пунктах 3, 4 и 5 формулы могут быть приведены без подставления числовых значений α и β.

Задача 11.2. Тяни-толкай.

Если на маленький брусок, лежащий на шершавой поверхности, действовать силой F, направленной горизонтально вправо (рис. 11.1а), он будет двигаться с ускорением $a_1 = 1$ м/с^2.

1. Каким станет ускорение бруска a_2, если та же сила F направлена вниз и вправо под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (см. рис. 11.1б)?

2. С каким ускорением a_3 будет двигаться брусок, если сила F направлена вверх и вправо под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (см. рис. 11.1в)?

Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность равен $\mu = 0{,}4$, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Поверхность считать горизонтальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

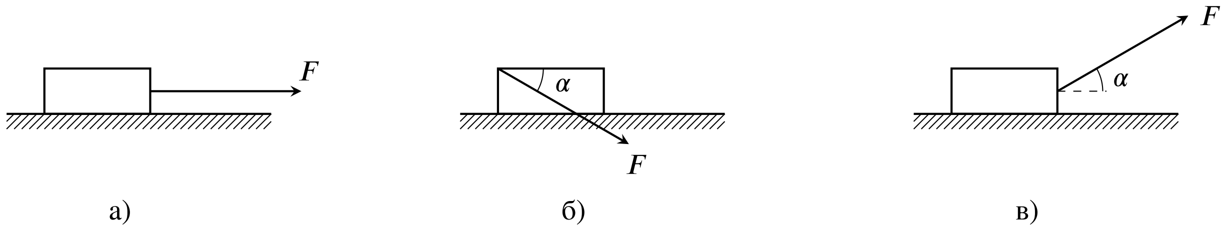

Рис. 11.1.

Ответ: 1) $a_2 = 0$; 2) $a_3 = 1{,}33$ м/с^2.

Решение: Пусть m — масса бруска. В первом случае

$$ma_1 = F - \mu mg \quad \Rightarrow \quad F = m(a_1 + \mu g).$$

Рассмотрим второй случай и предположим, что $a_2 > 0$. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси (N — сила реакции опоры):

$$\begin{cases} ma_2 = F\cos\alpha - \mu N, \\ 0 = N - F\sin\alpha - mg \end{cases} \Rightarrow \quad ma_2 = F\cos\alpha - \mu(mg + F\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad ma_2 = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu mg \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = (a_1 + \mu g)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g = 5\text{ м/с}^2 \cdot (0{,}866 - 0{,}2) - 4\text{ м/с}^2 = -0{,}67\text{ м/с}^2 < 0.$$

Отсюда видно, что наше предположение неверно, и $a_2 = 0$.

Рассмотрим теперь третий случай и снова предположим, что $a_3 > 0$. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси (N' — сила реакции опоры):

$$\begin{cases} ma_3 = F\cos\alpha - \mu N', \\ 0 = N' + F\sin\alpha - mg \end{cases} \Rightarrow \quad ma_3 = F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad ma_3 = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = (a_1 + \mu g)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g = 5\text{ м/с}^2 \cdot (0{,}866 + 0{,}2) - 4\text{ м/с}^2 = 1{,}33\text{ м/с}^2 > 0.$$

В третьем случае наше предположение верно, поэтому $a_3 = 1{,}33$ м/с^2.

Критерии:

1) Записан 2й закон Ньютона в первом случае . . . . 2 балла
2) Записан 2й закон Ньютона во втором случае (в проекции на обе оси) 1 балл за уравнение (в сумме 2 балла)
3) Обосновано, что $a_2 = 0$ . . . . 2 балла
4) Записан 2й закон Ньютона в третьем случае (в проекции на обе оси) 1 балл за уравнение (в сумме 2 балла)
5) Найдено значение a_3 . . . . 2 балла

Задача 11.3. Подъём груза.

Груз массой m, насаженный на вертикальную гладкую спицу, тянут вверх, прикладывая к нити, перекинутой через неподвижный блок, постоянную горизонтальную силу. Ось блока находится на расстоянии L от спицы. В начальный момент груз имеет нулевую скорость и расположен так, как показано на рис. 11.2.

1. С какой наименьшей силой F нужно тянуть, чтобы груз смог подняться до уровня оси блока?
2. Какова **в этом случае** будет максимальная скорость груза в процессе его движения?

Нить считать невесомой и нерастяжимой. Размерами блока и груза пренебречь. Трение в оси блока отсутствует.

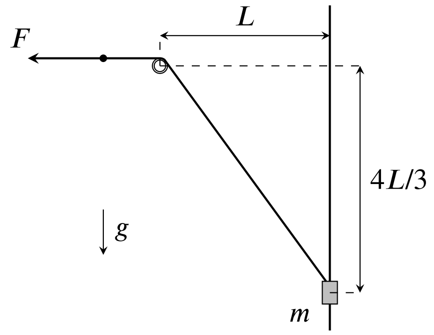

Рис. 11.2.

Ответ: 1) $F_{min} = 2mg$; 2) $v_{max} = (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{gL}$.

Решение: Движение груза вдоль спицы происходит с переменным ускорением!

1. Чтобы найти наименьшую силу F, рассмотрим критический случай, когда скорость груза на уровне оси блока равна нулю. Запишем связь между изменением полной энергии груза и работой силы F. Работа равна

$$A = F\Delta s = F \cdot \left(\sqrt{L^2 + \left(\frac{4L}{3}\right)^2} - L\right) = F \cdot \left(\frac{5L}{3} - L\right) = \frac{2FL}{3}.$$

Так как начальная скорость тоже равна нулю, изменение полной энергии в критическом случае равно увеличению потенциальной энергии. Отсюда получаем, что

$$mg \cdot \frac{4L}{3} = \frac{2F_{min}L}{3} \quad \Rightarrow \quad F_{min} = 2mg.$$

2. Если скорость груза максимальна, то его ускорение равно нулю. Это значит, что силы, действующие на груз, компенсируют друг друга. Пусть груз к этому моменту поднялся на высоту h, а нить образовала угол α со спицей. Запишем условие равенства сил в проекции на спицу:

$$F_{min}\cos\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\alpha = L/(4L/3 - h) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\cdot(4L/3 - h) = L \quad \Rightarrow \quad h = 4L/3 - L/\sqrt{3}.$$

Запишем снова связь между изменением полной энергии груза и работой силы F:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} + mgh = F \cdot \left(\frac{5L}{3} - \frac{L}{\cos\alpha}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_{max}^2}{2} + mg \cdot \left(\frac{4L}{3} - \frac{L}{\sqrt{3}}\right) = 2mg \cdot \left(\frac{5L}{3} - \frac{2L}{\sqrt{3}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_{max}^2 = gL \cdot \left(4 - 2\sqrt{3}\right) = gL \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{gL} \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

Критерии:

1) Указано, что на уровне оси блока в критическом случае скорость груза равна нулю . . . . 1 балл
2) Записано выражение для работы силы F по подъёму груза до уровня оси . . . . 2 балла
3) Найдено значение минимальной силы F_{min} . . . . 2 балла
4) Найдено положение, где ускорение груза равно нулю . . . . 1 балл
5) Записано выражение для работы силы F по подъёму груза до места, где скорость максимальна . . . 2 балла
6) Найдено значение v_{max} . . . . 2 балла

Указания проверяющим:

1) В пункте 4 достаточно найти h (или $L - h$) или α, соответствующие положению груза.
2) В пунктах 2 и 5 учащийся должен привести «расшифрованные» выражения. Формулы $A = F\Delta s$ недостаточно.
3) Коэффициент при $\sqrt{gL}$ может быть записан в любой из тождественных форм, например: $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$, 0,73 и т.п. Баллы во всех таких случаях ставить.

Задача 11.4. Изучаем цикл.

Одноатомный идеальный газ совершает цикл 1-2-3-4-1 (см. рис. 11.3), состоящий из двух изохор и двух изобар. Температура газа в точке 1 равна T_1, в точке 3 равна $T_3 = 6T_1$, а в точке 2 температура на T_1 больше, чем температура в точке 4.

1. Какова температура газа в точках 2 и 4?
2. Какую работу совершит ν молей газа за этот цикл?
3. Определите КПД данного цикла.

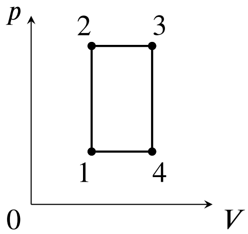

Рис. 11.3.

Ответ: 1) $T_2 = 3T_1$, $T_4 = 2T_1$; 2) $A = 2\nu RT_1$; 3) $\eta = 4/21$.

Решение: Пусть T_2 и T_4 — температуры в точках 2 и 4 соответственно, причём по условию $T_2 = T_1 + T_4$. Так как процессы 1-2 и 3-4 изохорные, а давления в точках 2-3 и 1-4 совпадают,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_4 + T_1}{T_1} = \frac{6T_1}{T_4} \quad \Rightarrow \quad T_4^2 + T_1T_4 - 6T_1^2 = 0.$$

Отбрасывая отрицательный корень, получаем, что $T_4 = 2T_1$. Соответственно, $T_2 = 3T_1$.

Работа за цикл равна

$$A = (p_2 - p_1) \cdot (V_3 - V_2) = p_1V_2\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) = p_1V_2\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) = 2p_1V_2 = 2\nu RT_1.$$

Количество теплоты, подведенное к газу:

$$Q_+ = Q_{13} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + p_2(V_3 - V_2) = \frac{3}{2}\nu R(6T_1 - T_1) + p_2V_2\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) =$$

$$= \frac{15}{2}\nu RT_1 + \nu R \cdot 3T_1 = \frac{21}{2}\nu RT_1.$$

КПД цикла, соответственно, равен

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{4}{21}.$$

Критерии:

1) Записана пропорция между температурами T_1, ..., T_4 . . . . 1 балл
2) Найдены температуры T_2 и T_3 . . . . 2 балла
3) Найдено выражение для работы $A = 2\nu RT_1$ . . . . 2 балла
4) Записана формула для расчёта Q_+ . . . . 1 балл
5) Найдено выражение $Q_+ = 21/2 \cdot \nu RT_1$ . . . . 2 балла
6) Найдено выражение для КПД $\eta = 4/21$ . . . . 2 балла

Задача 11.5. Заряд имеет значение!

В цепи, изображённой на рис. 11.4, ключ K вначале разомкнут, конденсатор ёмкостью $3C$ не заряжен, а заряд q конденсатора ёмкостью C отличен от нуля. Определите заряд q, если после замыкания ключа в цепи выделяется количество теплоты $Q = C\mathscr{E}^2/4$. Величины C и ЭДС батареи $\mathscr{E}$ считать заданными.

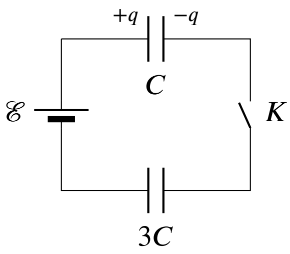

Рис. 11.4.

Ответ: $C\mathscr{E}\left(1 \pm \sqrt{2/3}\right)$.

Решение: Пусть после замыкания ключа через источник (в положительном направлении) прошёл заряд Δq. Тогда заряд на конденсаторе C стал равным $q + \Delta q$, а на правой обкладке конденсатора $3C$ появился заряд Δq. Сумма напряжений на конденсаторах равна ЭДС источника:

$$\frac{q + \Delta q}{C} + \frac{\Delta q}{3C} = \mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad 3q + 4\Delta q = 3C\mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta q = \frac{3}{4} \cdot (C\mathscr{E} - q).$$

Работа источника $A_{\text{ист}} = \Delta q \cdot \mathscr{E} = 3\mathscr{E}/4 \cdot (C\mathscr{E} - q)$ равна сумме изменения энергии конденсаторов и количества выделившейся теплоты:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + \Delta W_{3C} + Q = \frac{1}{2C}\left((q + \Delta q)^2 - q^2\right) + \frac{\Delta q^2}{6C} + Q = \frac{3}{8C}\left((C\mathscr{E})^2 - q^2\right) + Q \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3C\mathscr{E}^2}{4} - \frac{3q\mathscr{E}}{4} = \frac{3C\mathscr{E}^2}{8} - \frac{3q^2}{8C} + Q.$$

Подставляя выражение $Q = C\mathscr{E}^2/4$, получаем

$$\frac{3q^2}{8C} - \frac{3q\mathscr{E}}{4} + \frac{C\mathscr{E}^2}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 - 2C\mathscr{E} \cdot q + \frac{(C\mathscr{E})^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = C\mathscr{E}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Критерии:

1) Записаны новые значения зарядов на конденсаторах . . . . 1 балл
2) Записана формула $q_1/C + q_2/(3C) = \mathscr{E}$ или её аналог . . . . 1 балл
3) Заряд, прошедший через источник, выражен через C, $\mathscr{E}$ и q . . . . 2 балла
4) Записана формула $A_{\text{ист}} = \Delta W_C + \Delta W_{3C} + Q$ или её аналог . . . . 1 балл
5) Получено верное уравнение для нахождения q через C и $\mathscr{E}$ . . . . 3 балла
6) Найдены возможные значения q . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Баллы в пунктах 2 и 4 ставить за само наличие формул, даже если дальнейший ход решения неверен.
2) В пункте 1 балл ставится, если учащийся выбрал такие обозначения для зарядов конденсаторов, что их сумма явно равна q, или же в решении должно присутствовать условие $q_1 + q_2 = q$.
3) Если учащийся почему-то оставил только один верный корень уравнения, а второй зачем-то был отброшен, за пункт 6 критериев ставить 1 балл из 2.

Максимально возможный балл в 11 классе 50