7 класс

Задача 7.1. Фиксискорость.

ДимДимыч и фиксик Нолик решили устроить дружеское соревнование по бегу. Чтобы уравнять шансы, ДимДимыч поставил фиксика на расстоянии 2 м от финиша, а сам стартовал на 90 м дальше. Нолик бежал изо всех сил, со скоростью 10 фиксиметров в секунду, но ДимДимыч всё равно финишировал на 1 секунду раньше. Через неделю упорных тренировок Нолика друзья повторили забег, но теперь ДимДимыч стартовал на 8 м ближе к фиксику, чем в первый раз. Несмотря на это, Нолик, развив скорость в 12 фиксиметров в секунду, обогнал друга на 1 секунду. Определите, сколько фиксиметров содержится в одном человеческом метре. Дистанция, пробегаемая Ноликом, и скорость ДимДимыча каждый раз была одна и та же. Скорость участников во время бега считать постоянной.

Ответ: 120 фиксиметров в 1 метре.

Решение: Пусть N — количество фиксиметров в одном человеческом метре. Тогда скорость Нолика в первом забеге была $\frac{10}{N}$ м/с, а во втором — $\frac{12}{N}$ м/с.

Рассмотрим первый забег. ДимДимыч там пробежал 92 м с некоторой скоростью v. Так как он прибежал на 1 секунду раньше фиксика

$$\frac{2\text{ м}}{\frac{10}{N}\text{ м/с}} - \frac{92\text{ м}}{v} = 1\text{ с} \quad \Rightarrow \quad 0{,}2\text{ с}\cdot N - \frac{92\text{ м}}{v} = 1\text{ с}.$$

Во втором случае ДимДимыч пробежал 84 м и прибежал на 1 секунду позже Нолика. Поэтому

$$\frac{84\text{ м}}{v} - \frac{2\text{ м}}{\frac{12}{N}\text{ м/с}} = 1\text{ с} \quad \Rightarrow \quad \frac{84\text{ м}}{v} - 1/6\text{ с}\cdot N = 1\text{ с}.$$

Из полученных уравнений находим, что

$$\begin{cases} N - \frac{5\cdot 92\text{ м/с}}{v} = 5, \\ \frac{6\cdot 84\text{ м/с}}{v} - N = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{6\cdot 84\text{ м/с}}{v} - \frac{5\cdot 92\text{ м/с}}{v} = 11 \quad \Rightarrow \quad \frac{44\text{ м/с}}{v} = 11 \quad \Rightarrow \quad v = 4\text{ м/с}.$$

Отсюда получаем значение N:

$$0{,}2\text{ с}\cdot N - \frac{92\text{ м}}{4\text{ м/с}} = 1\text{ с} \quad \Rightarrow \quad N = 120.$$

Критерии:

1) Скорости Нолика в первом и втором случае выражены через одну величину (например, через N) . . 2 балла

2) Записано уравнение $\frac{2\text{ м}}{\frac{10}{N}\text{ м/с}} - \frac{92\text{ м}}{v} = 1$ с для первого забега (или его аналог) . . . . 2 балла

3) Записано уравнение $\frac{84\text{ м}}{v} - \frac{2\text{ м}}{\frac{12}{N}\text{ м/с}} = 1$ с для второго забега (или его аналог) . . . . 2 балла

4) Найдено значение N . . . . 4 балла

Указание проверяющим:

1) Учащийся может сначала найти скорость Нолика в м/с для какого-либо случая, а потом найти N; может выразить все длины в фиксиметрах и т.п. Необходимо внимательно изучить решение учащегося и соотнести его с указанными критериями.

2) Если в процессе решения правильной системы уравнений учащийся верно нашёл какую либо скорость (например, скорость ДимДимыча), но ошибся в подсчёте N, за пункт 4 ставить 2 балла из 4.

Задача 7.2. Вода и кубики.

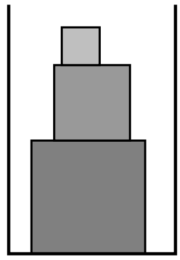

Рис. 7.1.

В цилиндрическом сосуде друг на друге лежат три кубика (см. рис. 7.1). Ребро среднего кубика в два раза длиннее ребра верхнего, а ребро нижнего больше ребра верхнего кубика в три раза. В сосуд начинают медленно наливать воду. До верхней грани большого кубика вода поднимается со скоростью $v_1 = 18$ мм/мин. От нижней до верхней грани среднего кубика она поднимается со скоростью $v_2 = 8$ мм/мин.
1. С какой скоростью v_3 вода будет подниматься от нижней до верхней грани маленького кубика?
2. Какова средняя скорость $v_{\text{ср}}$ поднятия уровня воды от дна сосуда до верхней грани маленького кубика?
Объём воды, поступающей в сосуд в единицу времени, в течение всего эксперимента не меняется.

Ответ: 1) 6 мм/мин; 2) 10,3 мм/мин.

Решение: Пусть a — длина ребра верхнего куба, а S — площадь дна сосуда. Объём воды, поступающей в сосуд в единицу времени, можно записать как произведение площади свободной от кубика части сечения сосуда и скорости подъёма воды. Так как эта величина в течение эксперимента не меняется, получаем

$$(S-(3a)^2)v_1 = (S-(2a)^2)v_2 = (S-a^2)v_3.$$

Из первого равенства найдём площадь S:

$$(S-9a^2)\cdot 18 \text{ мм/мин} = (S-4a^2)\cdot 8 \text{ мм/мин} \quad\Rightarrow\quad 18S - 162a^2 = 8S - 32a^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 10S = 130a^2 \quad\Rightarrow\quad S = 13a^2$$

и подставим во второе равенство:

$$(S-4a^2)\cdot 8 \text{ мм/мин} = (S-a^2)v_3 \quad\Rightarrow\quad v_3 = \frac{(S-4a^2)\cdot 8 \text{ мм/мин}}{S-a^2} = \frac{(13a^2-4a^2)\cdot 8 \text{ мм/мин}}{13a^2-a^2} = 6 \text{ мм/мин}.$$

Рассчитаем теперь среднюю скорость поднятия воды. Высота первого участка равна $3a$, второго — $2a$, третьего — a, поэтому

$$v_{\text{ср}} = \frac{3a+2a+a}{\frac{3a}{v_1}+\frac{2a}{v_2}+\frac{a}{v_3}} = \frac{6}{\frac{3}{18 \text{ мм/мин}}+\frac{2}{8 \text{ мм/мин}}+\frac{1}{6 \text{ мм/мин}}} \approx 10{,}3 \text{ мм/мин}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $(S-9a^2)v_1 = (S-4a^2)v_2$ или его аналог . . . . 1 балл
2) Найдена связь между S и a^2 . . . . 2 балла
3) Записано уравнение $(S-4a^2)v_2 = (S-a^2)v_3$ (или аналогичное равенство с v_1 и v_3) . . . . 1 балл
4) Найдено значение скорости v_3 . . . . 2 балла
5) Записана верная формула для $v_{\text{ср}}$ через v_1, v_2, v_3 . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение $v_{\text{ср}}$ . . . . 2 балла

Задача 7.3. Туристы.

Лосяш и Копатыч как-то отправились в поход с одной ночёвкой на поляне в лесу. Друзья вышли в 9 часов утра, после чего дотошный Лосяш стал каждые 6 часов заносить в свой дневник данные о пройденном расстоянии (см. таблицу на рис. 7.2). Переночевав и съев запасы, Лосяш и Копатыч отправились налегке в обратный путь по той же самой дороге и вернулись домой в 14 ч 50 мин.

1. С какой скоростью Лосяш и Копатыч возвращались домой?
2. Сколько времени друзья были на поляне?

Считать, что скорости путешественников по дороге туда и по дороге обратно были постоянными, а находясь на поляне, они не перемещались.

время	9:00	15:00	21:00	3:00	9:00
s, км	0	15	30	33	45

Рис. 7.2.

Ответ: 1) 3,6 км/ч; 2) 7 ч 28 мин.

Решение: Друзья идут в сторону поляны со скоростью

$$v_1 = \frac{15\ \text{км}}{6\ \text{ч}} = 2{,}5\ \text{км/ч}.$$

В промежутке между 21:00 и 3:00 они за 6 часов прошли меньше 15 км, следовательно где-то после 21:00 Копатыч и Лосяш остановились на поляне. Путь до поляны составил не менее 30 км, поэтому общее расстояние, пройденное за весь поход, составило минимум 60 км. Из второй части таблицы видно, что в между 3:00 и 9:00 следующего дня они за 6 часов друзья прошли 12 км, а с 9:00 до 14:50 (почти 6 часов) — не менее 15 км. Из приведённого рассуждения следует, что, во-первых, Лосяш и Копатыч ушли с поляны уже где-то после 3 часов ночи, а, во-вторых, расстояние от дома до поляны равно 33 км.

Весь путь равен 66 км, поэтому скорость друзей по дороге обратно составила

$$v_2 = \frac{66\ \text{км} - 45\ \text{км}}{5\ \text{ч}\ 50\ \text{мин}} = \frac{21\ \text{км}}{35/6\ \text{ч}} = 3{,}6\ \text{км/ч}.$$

Найдём время прихода на поляну. После 21:00 туристы должны пройти ещё 3 км. На это им потребуется время

$$t_1 = \frac{3\ \text{км}}{v_1} = \frac{3\ \text{км}}{2{,}5\ \text{км/ч}} = 1{,}2\ \text{ч} = 1\ \text{ч}\ 12\ \text{мин}.$$

Следовательно, друзья пришли на место в 22 ч 12 мин.

Найдём теперь время ухода. До 9:00 утра им нужно пройти 12 км. На это Лосяшу с Копатычем потребуется время

$$t_2 = \frac{12\ \text{км}}{v_2} = \frac{12\ \text{км}}{3{,}6\ \text{км/ч}} = 3\frac{1}{3}\ \text{ч} = 3\ \text{ч}\ 20\ \text{мин}.$$

Отсюда получаем, что друзья ушли с поляны в 5 ч 40 мин.

Окончательно получаем, что из 12 часов в промежутке между 21:00 и 9:00 утра Лосяш и Копатыч находились на поляне в течение

$$12\ \text{ч} - 1\ \text{ч}\ 12\ \text{мин} - 3\ \text{ч}\ 20\ \text{мин} = 7\ \text{ч}\ 28\ \text{мин}.$$

Критерии:

1) Найдена скорость по дороге к поляне . . . . 1 балл
2) Обосновано, что расстояние до поляны равно 33 км . . . . 2 балла
3) Найдена скорость по дороге обратно . . . . 2 балла
4) Найдено время прихода друзей на поляну или время t_1 . . . . 2 балла
5) Найдено время ухода друзей с поляны или время t_2 . . . . 2 балла
6) Найдено время пребывания друзей на поляне . . . . 1 балл

Указания проверяющим:

1) Обоснование (пункт 2) должно содержать объяснение, почему друзья ушли с поляны не раньше 3 часов ночи. Иначе расстояние до поляны могло бы быть и больше 33 км.

2) Если расстояние до поляны указано без необходимого обоснования, баллы за пункт 2 не ставить, а остальные пункты оценивать независимо.

3) Вместо времени прихода (22:12) или величины t_1 учащийся может найти время всего пути к поляне (13 ч 12 мин). В этом случае за пункт 4 ставить полный балл.

4) Вместо времени ухода (5:40) или величины t_2 учащийся может найти время всего пути до дома (9 ч 10 мин). В этом случае за пункт 5 ставить полный балл.

5) Скорость по дороге **к поляне** может быть не представлена явно. Если за пункт 4 стоит полный балл, то балл за пункт 1 ставить автоматически.

Задача 7.4. Встречи на дороге.

Два автомобиля выехали из одной точки по одной и той же дороге в одном направлении, но в разное время. Графики зависимости пройденного каждым автомобилем пути от времени движения представлены на рис. 7.3.

1. Насколько позже стартовал автомобиль №2, если машины встретились на дороге через 1,5 ч после старта первого автомобиля?
2. Через сколько минут после первой встречи автомобили встретятся на дороге снова?
3. На каком расстоянии от места старта это произойдёт?

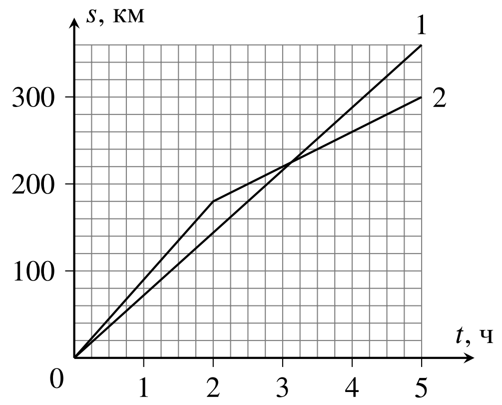

Рис. 7.3.

Ответ: 1) 18 мин; 2) 75 мин; 3) 198 км.

Решение: Определим сначала скорости автомобилей. Для этого возьмём точки на графике, попадающие в узлы координатной сетки и, при этом, максимально разнесённые друг от друга (для большей точности). Первый автомобиль движется с постоянной скоростью $v = \frac{360\ \text{км}}{5\ \text{ч}} = 72$ км/ч. Второй автомобиль первые 2 ч двигался со скоростью $u_1 = \frac{180\ \text{км}}{2\ \text{ч}} =$ $= 90$ км/ч, а потом 3 ч со скоростью $u_2 = \frac{300\ \text{км} - 180\ \text{км}}{3\ \text{ч}} = 40$ км/ч.

Пусть второй автомобиль стартовал через время t_0 после первого. По условию, через 1,5 часа после старта первого автомобиля они встретились. Эта встреча произошла на расстоянии $s_{в1} = v \cdot 1{,}5\ \text{ч} = 108$ км/ч от места старта. Отсюда получим, что

$$u_1(1{,}5\ \text{ч} - t_0) = 108\ \text{км} \quad \Rightarrow \quad 1{,}5\ \text{ч} - t_0 = \frac{108\ \text{км}}{90\ \text{км/ч}} = 1{,}2\ \text{ч} \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0{,}3\ \text{ч} = 18\ \text{мин}.$$

Найдём теперь время τ между двумя встречами автомобилей. Первый автомобиль добрался до места второй встречи за время $1{,}5\ \text{ч} + \tau$, а второй — за время $1{,}5\ \text{ч} + \tau - t_0$. Первые 2 ч второй автомобиль ехал со скоростью u_1, а оставшееся время — со скоростью u_2. Приравняем пройденные машинами пути:

$$v(1{,}5\ \text{ч} + \tau) = u_1 \cdot 2\ \text{ч} + u_2(1{,}5\ \text{ч} + \tau - t_0 - 2\ \text{ч}) \quad \Rightarrow \quad 108\ \text{км} + 72\ \text{км/ч} \cdot \tau = 180\ \text{км} - 32\ \text{км} + 40\ \text{км/ч} \cdot \tau \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 32\ \text{км/ч} \cdot \tau = 40\ \text{км} \quad \Rightarrow \quad \tau = 1{,}25\ \text{ч} = 75\ \text{мин}.$$

Пройденный первым автомобилем путь до места второй встречи будет равен

$$s = v(1{,}5\ \text{ч} + \tau) = v \cdot 2{,}75\ \text{ч} = 72\ \text{км/ч} \cdot 2{,}75\ \text{ч} = 198\ \text{км}.$$

Критерии:

1) Найдена скорость v . . . . 1 балл
2) Найдены скорости u_1 и u_2 . . . . 1 балл
3) Найдено время запаздывания t_0 . . . . 2 балла
4) Записано верное уравнение для определения τ . . . . 2 балла
5) Найдено время между двумя встречами τ . . . . 2 балла
6) Найдено расстояние от старта до места второй встречи . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Если верно найдена только одна из скоростей в пункте 2, ставить за этот пункт 0,5 балла.
2) Если учащийся ошибся в определении скоростей по графику, но далее использовал верные (с физической точки зрения) уравнения, то баллы снимаются только за пункты 1 и 2. Остальные пункты оценивать независимо.
3) Если учащийся определял какие-то иные величины по графику (например, $s_{в1} \approx 110$ км), внося этим дополнительные погрешности, те из пунктов 3, 5 или 6 критериев, где это было использовано, оценивать максимум в 1 балл.

Максимально возможный балл в 7 классе 40