8 класс

Задача 8.1. Моторная лодка.

Моторная лодка прошла от пристани Борисово вниз по течению реки до пристани Гуськово, а через некоторое время обратно, вверх по реке, до пристани Борисово. Средняя скорость лодки на **всём** пути была равна v, а время стоянки в Гуськово составило 1/10 времени всего путешествия. Чему равна скорость лодки u в стоячей воде, если она больше скорости течения реки в 3 раза? Считать, что лодка движется вверх и вниз по течению равномерно, а скорость течения реки не меняется.

Ответ: $5v/4$.

Решение: По условию скорость течения реки равна $v_{\text{теч}} = u/3$. Лодка идёт вниз по течению со скоростью $v_{\text{по}} = u + v_{\text{теч}} = 4u/3$, а против течения — со скоростью $v_{\text{против}} = u - v_{\text{теч}} = 2u/3$.

Пусть s — расстояние между пристанями, тогда время всего путешествия равно $t = 2s/v$, а время стоянки в Гуськово

$$t_{\text{ост}} = \frac{t}{10} = \frac{2s}{10v}.$$

Следовательно

$$t = \frac{s}{v_{\text{по}}} + \frac{s}{v_{\text{против}}} + t_{\text{ост}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2s}{v} = \frac{s}{v_{\text{по}}} + \frac{s}{v_{\text{против}}} + \frac{2s}{10v} \quad \Rightarrow \quad \frac{9s}{5v} = \frac{s}{4u/3} + \frac{s}{2u/3} = \frac{3s}{4u} + \frac{3s}{2u} = \frac{9s}{4u}.$$

Отсюда получаем, что $u = 5v/4$.

Критерии:

1) Записано выражение для скорости лодки по течению $v_{\text{по}}$ через u . . . . 2 балла
2) Записано выражение для скорости лодки против течения $v_{\text{против}}$ через u . . . . 2 балла
3) Записано выражение для времени стоянки $t_{\text{ост}}$ лодки в Гуськово . . . . 2 балла
4) Записано уравнение, связывающее среднюю скорость с $v_{\text{по}}$ и $v_{\text{против}}$ . . . . 2 балла
5) Найдена скорость u . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Учащийся может сразу связать верные выражения для $v_{\text{по}}$, $v_{\text{против}}$ и/или $t_{\text{ост}}$ и среднюю скорость. В этом случае баллы за пункты 1, 2 и/или 3 ставятся в полном объёме.

Задача 8.2. Топим стакан.

В большой ванне с водой плавает цилиндрический пенопластовый стакан, до краёв заполненный водой, погружаясь на 75% своего объёма. Мальчик Паша стал аккуратно, на тонкой ниточке, по одному опускать в стакан алюминиевые грузики. Ёмкость стакана равна 210 см^3, масса одного грузика — 9,5 г. Какое максимальное число грузиков Паша сможет опустить, чтобы не утопить стакан? Плотность пенопласта равна 50 кг/м^3, плотность алюминия — 2700 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3.

Ответ: 11 штук.

Решение: Пусть M — масса стакана (без содержимого), $V = 210$ см^3 — его ёмкость. Запишем условие плавания стакана в первом случае:

$$(\rho_\text{в} V + M)g = 0{,}75\rho_\text{в} g\left(V + \frac{M}{\rho_\text{п}}\right) \quad\Rightarrow\quad \rho_\text{в} V + M = 0{,}75\rho_\text{в} V + \frac{0{,}75\rho_\text{в} M}{\rho_\text{п}} \quad\Rightarrow\quad M = \frac{0{,}25\rho_\text{в} V}{0{,}75\rho_\text{в}/\rho_\text{п} - 1} = 3{,}75\text{ г.}$$

Пусть m — масса одного грузика. Найдём теперь минимальное их количество N, при котором стакан полностью погрузится в воду, учитывая, что объём воды в стакане уменьшается на величину объёма погружённых тел $V_\text{гр} = Nm/\rho_\text{ал}$. Запишем еще раз условие плавания:

$$(\rho_\text{в}(V - V_\text{гр}) + M + Nm)g = \rho_\text{в} g\left(V + \frac{M}{\rho_\text{п}}\right) \quad\Rightarrow\quad \rho_\text{в} V - \frac{\rho_\text{в} N m}{\rho_\text{ал}} + M + Nm = \rho_\text{в} V + \frac{\rho_\text{в} M}{\rho_\text{п}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad Nm\left(1 - \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{ал}}\right) = M\left(\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{п}} - 1\right) \quad\Rightarrow\quad N = \frac{M}{m}\cdot\frac{\rho_\text{в}/\rho_\text{п} - 1}{1 - \rho_\text{в}/\rho_\text{ал}} \approx 11{,}9.$$

Отсюда следует, что максимальное количество грузиков, которое ещё не утопит стакан, равно 11.

Критерии:

1) Записано условие плавания для стакана без грузиков . . . . . 2 балла
2) Найдена масса или объём стенок стакана . . . . . 1 балл
3) Найден объём воды, оставшейся в стакане после погружения грузиков . . . . . 1 балл
4) Записано условие плавания для стакана с грузиками . . . . . 2 балла
5) Найдено значение N, при котором стакан погрузится полностью . . . . . 2 балла
6) Записано, что максимальное количество грузиков, которое не утопит стакан, равно 11 . . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Масса (или объём стенок) стакана могут быть записаны в виде формулы, связывающей данные из условия, без подсчёта числового значения. В этом случае балл за пункт 2 ставить.

2) Объём воды, оставшийся в стакане, может быть сразу записан внутри второго условия плавания. В этом случае баллы за пункт 3 ставить автоматически.

Задача 8.3. Сообщающиеся сосуды на новый лад.
В высоком теплоизолированном сосуде, разделённом тонкой вертикальной перегородкой на две неравные части, находится слой воды высотой $H = 10$ см при температуре $t_1 = 12\,^\circ$C. Площадь сечения широкой части сосуда в два раза больше площади сечения узкой, а между перегородкой и дном есть небольшой зазор (см. рис. 8.1). В широкую часть сосуда налили керосин при температуре $t_2 = 75\,^\circ$C так, что верхняя поверхность керосина оказалась на высоте $H_1 = 21$ см от дна сосуда. Определите установившуюся температуру жидкостей в сосуде. Удельная теплоёмкость керосина равна 2100 Дж/(кг·°C), воды — 4200 Дж/(кг·°C). Плотность керосина 800 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Стенки сосуда вертикальны, теплоёмкостью стенок и перегородки можно пренебречь.

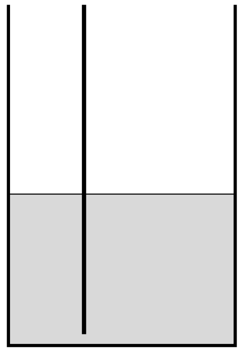

Рис. 8.1.

Ответ: 30 °C.

Решение: Пусть S — площадь сечения левого сосуда, тогда площадь сечения правого равна $2S$. Масса воды в сосуде $m_в = \rho_в H \cdot 3S$. После того, как в широкую часть сосуда налили керосин, уровень воды там опустился на некоторую величину x, а в узкой части, соответственно, поднялся на $2x$ (см. рис. 8.2).

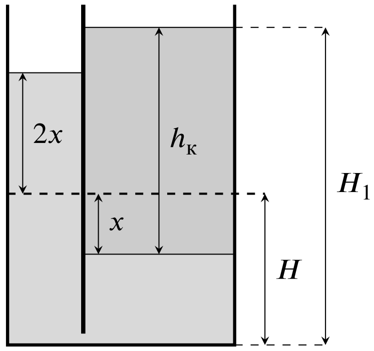

Рис. 8.2.

Пусть $h_к$ — высота слоя налитого керосина. Тогда

$$H_1 = H + h_к - x \quad \Rightarrow \quad h_к = x + 11 \text{ см}.$$

Запишем условие равенства давлений на уровне нижней границы керосина:

$$\rho_к g h_к = \rho_в g \cdot 3x \quad \Rightarrow \quad h_к = \frac{3\rho_в x}{\rho_к} = \frac{15x}{4}.$$

Отсюда получаем, что

$$15x/4 = x + 11 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ см},\ h_к = 15 \text{ см}.$$

Запишем теперь уравнение теплового баланса, учитывая, что масса керосина равна $m_к = \rho_к h_к \cdot 2S$:

$$c_в m_в(t_{уст} - t_1) = c_к m_к(t_2 - t_{уст}) \quad \Rightarrow \quad c_в \rho_в H \cdot 3S(t_{уст} - t_1) = c_к \rho_к h_к \cdot 2S(t_2 - t_{уст}) \quad \Rightarrow$$

$$t_2 - t_{уст} = \frac{3c_в \rho_в H}{2c_к \rho_к h_к} \cdot (t_{уст} - t_1) = 2{,}5(t_{уст} - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_{уст} = \frac{t_2 + 2{,}5t_1}{3{,}5} = 30\,^\circ\text{C}.$$

Критерии:
1) Записано выражение для массы воды в сосуде . . . . 0,5 балла
2) Записано выражение для массы керосина в сосуде . . . . 0,5 балла
3) Указано, что изменения высоты уровня воды в широкой и узкой частях сосуда отличаются в 2 раза . . 1 балл
4) Записана связь между H_1, H, $h_к$ и изменением уровня воды . . . . 1 балл
5) Записано условие равенства давлений . . . . 2 балла
6) Найдена высота слоя керосина . . . . 2 балла
7) Записано уравнение теплового баланса . . . . 1 балл
8) Найдена установившаяся температура $t_{уст}$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:
1) Выражения для массы воды и/или керосина могут быть сразу записаны внутри уравнения теплового баланса. В этом случае баллы за пункты 1 и/или 2 ставить автоматически.
2) Указание на то, что изменение уровней отличаются вдвое, может быть у учащегося на рисунке или сразу в условии равенства давлений. В этом случае балл за пункт 3 ставить.

Задача 8.4. Тающее равновесие.

На двух опорах лежит однородный стержень массой $M = 450$ г. К концам стержня подвешены два разных куска льда с массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 100$ г. Конструкцию осветило солнце, и обе льдинки начали одновременно таять. Скорость таяния большого куска равна $\mu_1 = 1{,}4$ г/мин, скорость таяния маленького $\mu_2 = 1{,}0$ г/мин.

1. Чему были равны силы давления стержня на опоры до того, как лёд начал таять?
2. Через какое время после начала таяния кусков льда конструкция опрокинется?

Длина стержня в 3 раза больше расстояния между опорами, относительно которых стержень лежит симметрично (см. рис. 8.3). Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

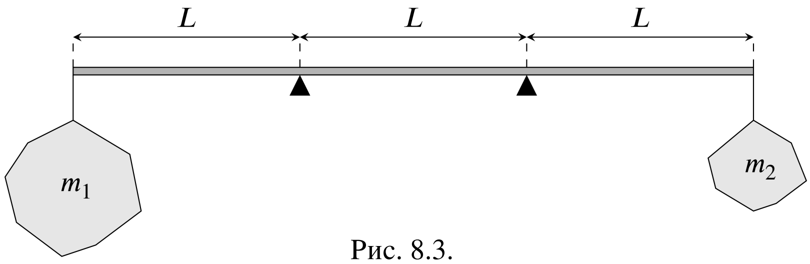

Рис. 8.3.

Ответ: 1) 9,25 Н и 0,25 Н; 2) 41 мин 40 с.

Решение: Рассмотрим силы, действующие на стержень до начала процесса таяния. Обозначим $N_л$ и $N_п$ силы, действующие на него со стороны левой и правой опоры соответственно. Запишем условие, что равнодействующая всех этих сил равна нулю:

$$Mg + m_1g + m_2g = N_л + N_п \quad \Rightarrow \quad N_л + N_п = 9{,}5 \text{ Н}.$$

Теперь запишем правило моментов относительно левой опоры:

$$m_1gL + N_пL = m_2g \cdot 2L + Mg \cdot L/2 \quad \Rightarrow \quad N_п = 2m_2g + Mg/2 - m_1g = 0{,}25 \text{ Н}.$$

Следовательно, $N_л = 9{,}5$ Н $- 0{,}25$ Н $= 9{,}25$ Н.

Левый кусок льда изначально был тяжелее, скорость его таяния больше, но не в 4 раза (тогда бы он растаял быстрее маленького куска). Это означает, что рычаг может опрокинуться только влево. Рассмотрим момент отрыва t стержня от правой опоры и запишем правило моментов в этом случае относительно левой:

$$(m_1 - \mu_1t)gL = (m_2 - \mu_2t)g \cdot 2L + Mg \cdot L/2.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$m_1 - \mu_1t = 2m_2 - 2\mu_2t + M/2 \quad \Rightarrow \quad (2\mu_2 - \mu_1)t = 2m_2 + M/2 - m_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2m_2 + M/2 - m_1}{2\mu_2 - \mu_1} = \frac{2 \cdot 100 \text{ г} + 225 \text{ г} - 400 \text{ г}}{2 \cdot 1 \text{ г/мин} - 1{,}4 \text{ г/мин}} = \frac{25 \text{ г}}{0{,}6 \text{ г/мин}} = 41\frac{2}{3} \text{ мин} = 41 \text{ мин } 40 \text{ с}.$$

Критерии:

1) Записано правило моментов до начала таяния . . . . 2 балла
2) Записано условие равенства сил до начала таяния . . . . 1 балл
3) Найдены силы $N_л$ и $N_п$ . . . . 1 балл
4) Записаны законы изменения массы каждого куска со временем . . . . 1 балл
5) Указано, что в момент опрокидывания сила реакции со стороны правой опоры отсутствует . . . . 1 балл
6) Записано правило моментов . . . . 2 балла
7) Найдено время опрокидывания t . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 2 вместо условия равенства сил может быть записано правило моментов относительно иной, чем в пункте 1, точки. В этом случае за первое верно написанное правило моментов ставить 2 балла, а за второе — 1 балл (как за пункт 2 критериев).
2) Закон изменения массы (например, для первого куска $m_1 - \mu_1t$) может быть сразу записан внутри правила моментов. В этом случае баллы за пункт 4 ставить автоматически.
3) Если отсутствует **явно написанное** указание, что сила реакции правой опоры в момент опрокидывания равна нулю, балл за пункт 5 не ставить! Остальные пункты при этом оцениваются независимо.
4) Для ориентировки: в секундах время до опрокидывания равно 2500 с.

Максимально возможный балл в 8 классе 40