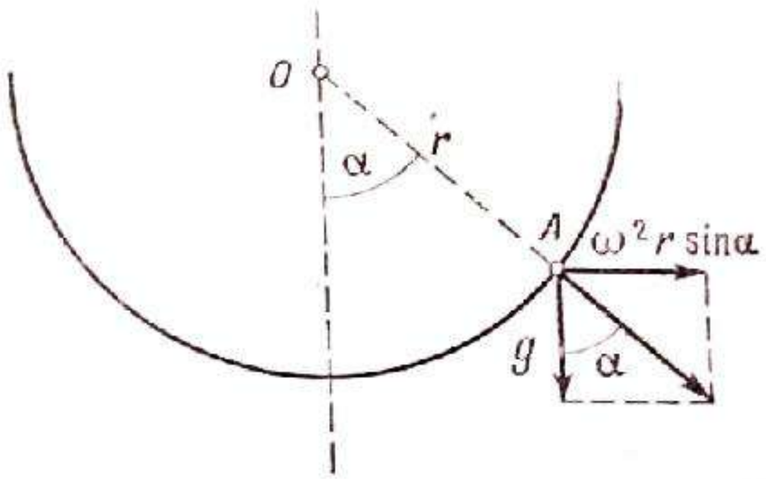
Всероссийская олимпиада школьников по физике
Муниципальный этап
9 класс
Возможные решения задач

Задача 1. Вращение

Сосуд в форме сферы радиусом $r = 9.81$ см, внутрь которого помещено небольшое тело, вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии шара. При угловой скорости $\omega_1 = 5$ рад/с давление тела на стенку в состоянии равновесия равно $P_1 = 10^{-2}$ Н. При какой скорости ω_2 давление тела на стенку станет равным $P_2 = 4\cdot10^{-2}$ Н? Трение между телом и поверхностью сосуда пренебрежимо мало ($g = 9.8$ м/с^2). (**10 баллов**)

Возможное решение:

Сделаем рисунок к задаче. Величины давления P_1 и P_2 относятся к состоянию равновесия. Значит, прежде всего следует исследовать это состояние. Пусть центр сферы, образующей сосуд, лежит в точке O, а тело находится в точке A. Ось вращения (обозначена пунктирной линией) проходит через точку O. Для описания состояния равновесия удобно использовать угол α, образованный радиусом, проведенным в точку A, и осью вращения. Очевидно, что $0 \le \alpha \le \pi / 2$



В состоянии равновесия во вращающейся системе отсчета результирующее ускорение, равное сумме ускорения свободного падения и центробежного ускорения, должно быть направлено перпендикулярно поверхности сосуда, т.е. по радиусу OA. В состоянии равновесия должно быть справедливо уравнение:

$$\mathrm{tg}\alpha_P = \frac{\omega^2 r \sin\alpha_P}{g} \text{ или } \sin\alpha_P\left(\frac{1}{\cos\alpha_P} - \frac{\omega^2 r}{g}\right) = 0, \qquad (1)$$

где α_P - величина угла α в состоянии равновесия.

Это равенство выполняется в том случае, когда первый или второй сомножитель равен нулю. Рассмотрим оба случая:

1. $\sin\alpha_P = 0$, или $\alpha_P = 0$. В этом случае тело находится на дне сосуда, и давление, оказываемое им на стенку сосуда, равно его весу.
2. $\cos\alpha_P = g / \omega^2 r$ или $\alpha_P = \arccos\left(g / \omega^2 r\right)$. Это равенство справедливо только при $g / \omega^2 r \le 1$, или $\omega \ge \omega_P = \sqrt{g / r}$. Подставив числовые данные, найдем $\omega_P = 10$ рад/с.

Согласно условию задачи, $\omega_1 < \omega_P$, это означает, что вначале тело покоилось на дне сосуда. Его вес равен тогда P_1, а масса $\sin\alpha_A m = P_1/g$.

Определим, теперь скорость ω_2, при которой давление тела на стенку сосуда будет равно P_2. Ясно, что ω_2 должно быть больше ω_P. Если тело в точке A находится в состоянии равновесия, то

$$\frac{rm\omega_2^2 \sin\alpha_A}{P_2} = \sin\alpha_A, \tag{2}$$

где $\sin\alpha_A$. Отсюда находим: $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{P_2 g}{P_1 r}} = \sqrt{\dfrac{P_2}{P_1}}\omega_P = 20$ рад/с.

Критерии оценивания:

2 балла – сделан рисунок, правильно указаны направления и величины ускорений;
2 балла – правильно записано соотношение (1);
2 балла – проанализированы условия равенства нулю выражения (1);
2 балла – получено соотношение (2);
2 балла – получен верный ответ.

Задача 2. Лёд и пар

В теплоизолированную систему, содержащую кусок льда массой $m_л = 100$ г при температуре $t_л = 0$ °C, впускают пар массой $m_п = 100$ г при температуре $t_п = 100$ °C. Какая температура установится в системе и каково будет её содержимое, а именно фазовое состояние и масса фаз? Удельная теплоемкость воды $c_в = 4.2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0.34$ МДж/кг, удельная теплота парообразования $L = 2.26$ МДж/кг. (**10 баллов**)

Возможное решение:

Условие задачи не даёт чёткого ответа, в каком состоянии будет находиться вещество при достижении термодинамического равновесия. Неясно, будет ли находиться вода в одной или двух фазах и в каких именно.

Проанализируем тепловые процессы, происходящие в системе. Для этого требуется оценить необходимое количество теплоты. Так, для плавления льда заданной массы $m_л$ необходимо количество теплоты:

$$Q_л = m_л \lambda = 34 \cdot 10^3 \text{ Дж.} \tag{1}$$

Количество теплоты, которое выделится при конденсации всего водяного пара заданной массы $m_п$:

$$Q_п = L m_п = 226 \cdot 10^3 \text{ Дж.} \tag{2}$$

Оценка полученных значений (1) и (2) говорит о том, что весь лёд расплавится и полученная из льда вода будет нагреваться. Так как конечная температура системы не задана, необходимо определить, какое количество теплоты необходимо для нагревания воды, образовавшейся из льда. Предельным случаем является нагревание воды до 100°C, то есть до начальной температуры пара $t_п$. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды до 100°C:

$$Q_в = c_в m_л (100°C - t_л) = 42 \cdot 10^3 \text{ Дж.} \tag{3}$$

Сравнивая сумму $Q_л + Q_в$ с количеством теплоты при конденсации пара $Q_п$, видим $Q_п > (Q_л + Q_в)$. Значит, конечная температура смеси $t_к$ будет равна начальной температуре пара $t_п$, то есть 100°C. Конечное фазовое состояние системы — это состояние жидкость-пар. Таким образом, сконденсируется только часть пара. Сконденсированная часть пара $\Delta m_п$ определяется из равенства:

$$L\Delta m_п = Q_л + Q_в, \qquad (4)$$

откуда $\Delta m_п$ равна:

$$\Delta m_п = \frac{Q_л + Q_в}{L} \approx 0.034 \text{ кг.} \qquad (5)$$

Тогда в системе при $t_к = 100$ °C будет находиться вода $m_{вк}$ и пар $m_{пк}$ массами:

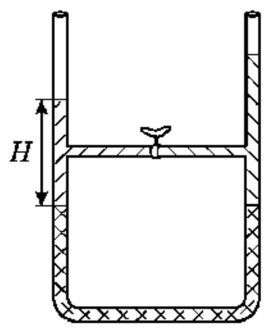
$$m_{вк} = m_в + \Delta m_п = 0.134\ кг \text{ и } m_{пк} = m_п + \Delta m_п = 0.066\ кг \qquad (6)$$

Критерии оценивания:

2 балла – сделана верная оценка теплового состояния системы (1) и (2);
2 балла – сделано верное предположение о предельном случае нагревания воды до 100 °C и получено значение выражения (3);
1 балл – определена конечная температура системы равная 100 °C;
1 балл – верно определено конечное фазовое состояние системы;
2 балла– верно получена масса части сконденсированного пара (5);
2 балла – получено верное значение для $m_{вк}$ и $m_{пк}$ (6).

Задача 3. Сообщающиеся сосуды

В сосуде находятся три жидкости: масло, ртуть и вода (см. рис.). Высота столбиков ртути в обоих коленах сосуда одинаковая, при этом высота столба воды – *H*. В некоторый момент открывается кран в тонкой горизонтальной трубке, соединяющей колена на высоте *H*/2 над уровнем ртути. Как изменится уровень масла в правом колене? Плотности ртути, воды и масла равны $\rho_P > \rho_B > \rho_M$. Считайте, что вода в правое колено не попадает, и что в обоих коленах всегда остаются вертикальные участки трубы, заполненные ртутью. **(10 баллов)**



Возможное решение:

До открывания крана гидростатическое давление по разные его стороны было различным. В левой части горизонтальной трубки давление было равно

$$p_1 = \frac{\rho_B g H}{2}, \qquad (1)$$

а в правой

$$p_2 = \rho_B g H - \frac{\rho_M g H}{2} = \frac{\rho_B g H}{2}\left(2 - \frac{\rho_M}{\rho_B}\right). \qquad (2)$$

Так как $\rho_B > \rho_M$, то $p_2 > p_1$. Это означает, что после открывания крана часть масла перетечет по горизонтальной трубке из правого колена в левое и разместится в нем над слоем воды, образовав столбик некоторой высоты x.

После перетекания масла уровень ртути в правом колене поднимется на некоторую величину y, а в левом он опустится на такую же величину y. Уровень воды над левым концом горизонтальной трубки понизится на такую же величину y, как и уровень ртути в левом колене. В свою очередь, столбик масла в правом колене поднимется на величину y из-за поднятия уровня ртути в правом колене и одновременно опустится на величину x

из-за перетекания части масла в левое колено. Новое состояние равновесия будет таким, что по разные стороны крана в горизонтальной трубке давления будут одинаковыми:

$$\frac{\rho_B gH}{2} + \rho_M gx - \rho_B gy = \rho_B gH - \frac{\rho_M gH}{2} + \rho_M gy - \rho_M gx. \qquad (3)$$

Кроме того, ясно, что давление в нижней части U-образной трубки должно остаться таким же, каким оно было до открывания крана. Это означает, что уменьшение давления в левом колене из-за вытекания из него ртути компенсируется давление, которое создается перетекшим в левое колено маслом:

$$\rho_P gy = \rho_M gx. \qquad (4)$$

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$x = \frac{\rho_P\left(\rho_B - \rho_M\right)H}{2\rho_M\left(2\rho_P - \rho_B - \rho_M\right)}. \qquad (5)$$

Откуда искомое понижение уровня масла в правом колене:

$$h = x - y = x\left(1 - \frac{\rho_M}{\rho_B}\right) = \frac{\rho_P - \rho_M}{2\rho_P - \left(\rho_B + \rho_M\right)} \cdot \frac{\left(\rho_B - \rho_M\right)}{\rho_M} \cdot \frac{H}{2}. \qquad (6)$$

Ответ: $h = \frac{\rho_P - \rho_M}{2\rho_P - \left(\rho_B + \rho_M\right)} \cdot \frac{\left(\rho_B - \rho_M\right)}{\rho_M} \cdot \frac{H}{2}$.

Критерии оценивания:

2 балла – получены гидростатические давления в обоих коленах сосуда до открывания крана (1 и 2);

3 балла – получено уравнение (3) для давления после открывания крана;

2 балла – получено выражение (4);

2 балла – определена высота столбика масла x (5);

1 балл – получен правильный ответ для h (6).

Задача 4. Бесконечная цепь

Дана бесконечная электрическая цепь, состоящая из одинаковых повторяющихся звеньев из трёх резисторов сопротивлением R (рис. 1). Необходимо определить, при каком значении сопротивления на резисторе X сопротивление R_{AB} (между контактами A и B) не будет зависеть от числа повторяющихся звеньев электрической цепи. (**10 баллов**)

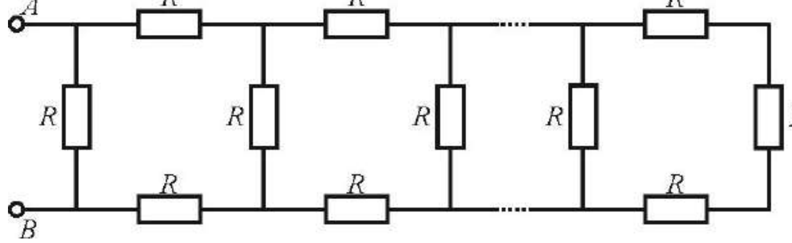


Рис. 1.

Возможное решение:

Рассмотрим схему, представленную в условии задачи. Рассматриваемая цепь состоит из резистора X и последовательности однотипных блоков, состоящих из трёх резисторов сопротивлением R. Если, по условию, количество повторяющихся блоков не влияет на полное сопротивление R_{AB}, приходим к выводу, что сопротивление R_{AB} должно зависеть и быть равным сопротивлению резистора X. Таким образом, получаем следующую схему (рис. 2).

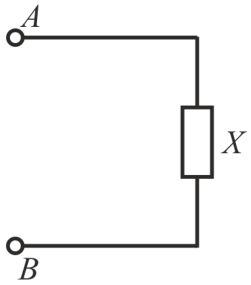


Рис. 2.

Исходя из схемы и анализа данных из условия задачи, получаем, что:

$$R_{AB} = X \ . \tag{1}$$

Далее рассмотрим электрическую цепь, представленную одним блоком из трёх одинаковых резисторов и резистором сопротивлением *X* (рис. 3).

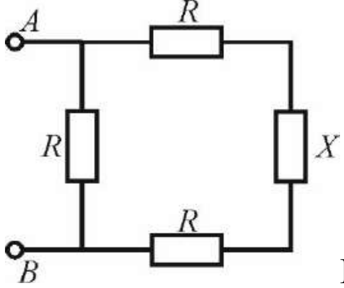


Рис. 3.

Результирующее общее сопротивление между контактами *A* и *B* в такой схеме определяется исходя из правил определения общего сопротивления при параллельном соединении. В данном случае параллельно соединены резистор сопротивлением *R* и три последовательно соединенных резистора (2 *R* и *X*). Получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + X}. \tag{2}$$

Приведя к общему знаменателю и выразив в явном виде R_{AB}, получаем:

$$R_{AB} = \frac{2R^2 + XR}{3R + X}. \tag{3}$$

Сравнивая выражения (1) и (3), получим:

$$X = \frac{2R^2 + XR}{3R + X}, \tag{4}$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно *X*:

$$X^2 + 2RX - 2R^2 = 0. \tag{5}$$

Решая уравнение (5) относительно *X* получаем 2 корня:

$$X_1 = R(-1 - \sqrt{3}) \text{ и } X_2 = R(\sqrt{3} - 1). \tag{6}$$

Решение X_1 не удовлетворяет условию задачи, поскольку сопротивление резистора не может быть отрицательным. Таким образом, искомое сопротивление резистора *X* равно:

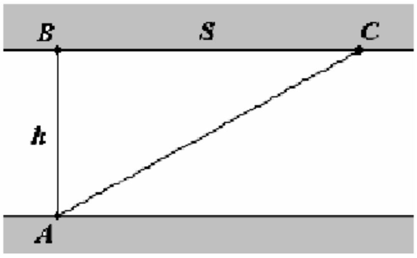
$$X = R(\sqrt{3} - 1). \tag{7}$$

Критерии оценивания:

2 балла – проанализировано условие задачи и определено равенство сопротивлений (1);
1 балл – рассмотрена цепь, представленная на рис. 2;
2 балла – получено выражение (2);
3 балла – получено квадратное уравнение относительно *X* (5);
1 балл – получены корни квадратного уравнения (6);
1 балл – проанализированы корни уравнения и определено значение сопротивления резистора *X* (7).

Задача 5. Кто быстрее

Спортсменам необходимо преодолеть расстояние между точками *A* и *C*, которые расположены на двух разных берегах канала шириной $h = 100$ м. Вода в канале стоит. Первый спортсмен преодолевает вплавь дистанцию *AC* на байдарке, а второй – первоначально плывет до противоположного берега в точку *B*, а потом пробегает расстояние *BC*. Скорость второго спортсмена вплавь в два раза меньше, а скорость бега в два раза больше, чем у первого. При каком значении расстояния *BC* спортсмены придут к финишу одновременно? Какая траектория является оптимальной для второго спортсмена, чтобы при полученном *BC* прийти к финишу быстрее? Во сколько раз быстрее придет к финишу второй спортсмен? **(10 баллов)**.



Возможное решение:

Пусть скорость первого спортсмена υ_0, тогда скорость второго спортсмена вплавь $\upsilon_0 / 2$, а скорость бега $2\upsilon_0$.

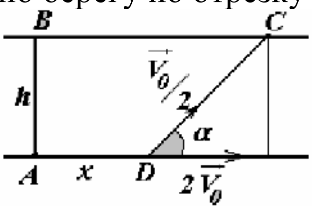
Отношение времен движения спортсменов

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h^2 + S^2} / \upsilon_0}{2h / \upsilon_0 + S / 2\upsilon_0} = \frac{2\sqrt{h^2 + S^2}}{4h + S} = 1 \qquad (1)$$

Решая это уравнение, находим

$$S = \frac{4h + \sqrt{16h^2 + 36h^2}}{3} = h\frac{4 + 2\sqrt{13}}{3} \approx 374\,\text{м} \qquad (2)$$

Чтобы время движения второго спортсмена было минимально, он может выбрать другой «маршрут»: пусть он сначала бежит по берегу по отрезку *AD*, а затем вплавь по отрезку *DB*.



Чтобы «выбрать оптимальную точку D, воспользуемся следующими рассуждениями: при движении по берегу, скорость его приближения к точке финиша равна

$$\upsilon_C = 2\upsilon_0 \cos\alpha \qquad (3)$$

Очевидно, что имеет смысл бежать по берегу до тех пока, эта скорость больше, чем скорость приближения вплавь. Таким образом, спортсмен должен начать плыть в точке, где направление на точку финиша, определяется соотношением

$$\upsilon_C = 2\upsilon_0 \cos\alpha = \upsilon_0 / 2 \qquad (4)$$

Из него следует, что

$$\cos\alpha = 1/4; \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Тогда $x = \left|AD\right| = S - \dfrac{h}{\mathrm{tg}\alpha} \approx 348$ м. (5)

Полное время движения по оптимальному маршруту

$$t_2 = \frac{x}{2\upsilon_0} + \frac{\sqrt{h^2 + \left(S - x\right)^2}}{\upsilon_0 / 2}, \qquad (6)$$

А отношение времен движения

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h^2 + S^2}}{x/2 + 2\sqrt{h^2 + \left(S - x\right)^2}} \approx 1.02\,.$$

Критерии оценивания:

2 балла – вывод соотношения (1);

2 балла – определение расстояния *BC* (2);

1 балл – рассуждения о наиболее оптимальной траектории второго спортсмена;

2 балла – записано условие (4);

2 балла – получено выражение для вычисления полного времени движения второго спортсмена по новой траектории (6);

1 балл – получен правильный ответ.