9 класс

Задача 9.1. В полёте.

Мячик бросили вертикально вверх с некоторой большой высоты. Какова была начальная скорость мячика, если за 2 с от момента броска он прошёл **путь**, равный 10,4 м? Рассмотрите все возможные варианты. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 12 м/с или 8 м/с.

Решение: Пусть v — начальная скорость мячика. Рассмотрим первый вариант, когда за время $t = 2$ с полёта мячик двигался строго вверх. В этом случае путь $s = 10{,}4$ м совпадает с величиной перемещения, поэтому

$$s = vt - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{s}{t} + \frac{gt}{2} = 15{,}2 \text{ м/с}.$$

Однако конечная скорость мячика, при этом, будет отрицательной

$$v_{\text{кон}} = v - gt = -4{,}8 \text{ м/с} < 0.$$

Из этого следует, что первый вариант невозможен.

Перейдём теперь ко второму варианту, когда мячик сначала поднялся на некоторую высоту h, а затем пролетел вниз расстояние $s - h$. Так как время подъёма равно $t_{\text{под}} = v/g$, а высота $h = v^2/(2g)$, получаем, что

$$s - h = \frac{g(t - t_{\text{под}})^2}{2} \quad \Rightarrow \quad s - \frac{v^2}{2g} = \frac{g}{2} \cdot \left(t^2 - \frac{2vt}{g} + \frac{v^2}{g^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{g} - vt + \frac{gt^2}{2} - s = 0.$$

Решаем полученное уравнение и находим оба решения:

$$v = \frac{g}{2} \cdot \left(t \pm \sqrt{\frac{4s}{g} - t^2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = 12 \text{ м/с}, v_2 = 8 \text{ м/с}.$$

Критерии:

1) Рассмотрен первый случай (движение в одном направлении) . . . . 1 балл
2) Показано, что в этом случае получается противоречие . . . . 2 балла
3) Записано выражение для h через v во втором случае . . . . 1 балл
4) Записано выражение для $t_{\text{под}}$ через v во втором случае . . . . 1 балл
5) Записано правильное уравнение для нахождения v . . . . 3 балла
6) Найдены оба решения v_1 и v_2 . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Балл за пункт 1 ставится, если учащийся прямо указал на существование этого варианта. Простого написания формулы $s = vt - gt^2/2$ недостаточно.
2) Вместо $t_{\text{под}}$ учащийся может найти время возвращения мяча в точку броска. Балл за пункт 4 в этом случае ставить.
3) Если учащийся нашёл только одно правильное значение скорости (второе было найдено неверно или, по каким-то причинам, отброшено), за пункт 6 ставить 1 балл из двух.

Задача 9.2. Вес в жидкости.

В цилиндрическом сосуде находится сплошной металлический куб. Когда в сосуд налили 240 г керосина, он полностью покрыл куб, и вес куба оказался равным 9,6 Н. Если же вместо керосина в сосуд налить 200 г воды, вес куба не изменится.

1. Какова длина ребра куба, если площадь дна сосуда в три раза больше площади грани этого куба?
2. Чему равна плотность металла, из которого сделан куб?
3. Насколько уровень керосина в первом случае выше верхней грани куба?

Жидкости могут свободно подтекать под нижнюю грань куба. Плотность воды равна 1000 кг/м^3, керосина — 800 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 1) 5 см; 2) 8480 кг/м^3; 3) на 0,7 см.

Решение: Пусть a — длина ребра куба, тогда площадь дна сосуда равна $S = 3a^2$. В первом случае керосин полностью покрывает куб, поэтому объём погружённой части куба равен его полному объёму $V = a^3$. Выталкивающая сила, действующая на куб, равна $F_A = \rho_\text{к} g a^3$.

Во втором случае вес куба не меняется. Как следствие, не меняется и выталкивающая сила, действующая на него. Так как плотность воды больше плотности керосина, то объём погружённой части V' должен быть меньше V. Найдём высоту слоя воды

$$h_\text{в} = \frac{V'}{a^2} = \frac{F_A}{\rho_\text{в} g a^2} = \frac{\rho_\text{к} a}{\rho_\text{в}} = 0{,}8a.$$

Масса воды равна $m_\text{в} = 200$ г, поэтому

$$m_\text{в} = \rho_\text{в} h_\text{в}(S - a^2) = \rho_\text{в} \cdot 0{,}8a \cdot 2a^2 \quad \Rightarrow \quad a^3 = \frac{m_\text{в}}{1{,}6\rho_\text{в}} = 125 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \text{ см}.$$

Запишем вес куба в керосине (ρ — плотность металла):

$$P = \rho g a^3 - \rho_\text{к} g a^3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{P}{ga^3} + \rho_\text{к} = \frac{9{,}6 \text{ Н}}{10 \text{ м/с}^2 \cdot 0{,}000125 \text{ м}^3} + 800 \text{ кг/м}^3 = 8480 \text{ кг/м}^3.$$

Пусть поверхность керосина находится на высоте x верхней гранью кубика. Тогда объём керосина равен

$$V_\text{к} = (S - a^2) \cdot a + Sx = 2a^3 + 3a^2 x.$$

С другой стороны, $V_\text{к} = (240 \text{ г})/\rho_\text{к} = 300 \text{ см}^3$. Приравнивая, получаем

$$2a^3 + 3a^2 x = 300 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{300 \text{ см}^3 - 2a^3}{3a^2} = \frac{300 \text{ см}^3 - 250 \text{ см}^3}{3 \cdot 25 \text{ см}^2} \approx 0{,}7 \text{ см}.$$

Критерии:

1) Обосновано, что куб в воду погружён не полностью . . . . . 1 балл
2) Найдена высота слоя воды . . . . . 1 балл
3) Найдена длина ребра куба . . . . . 2 балла
4) Записано выражение для веса куба в керосине (или в воде) . . . . . 1 балл
5) Найдена плотность металла . . . . . 2 балла
6) Записано выражение для объёма керосина . . . . . 1 балл
7) Найдено значение x . . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

При отсутствии обоснования, что куб в воду погружён частично, балл за пункт 1 не ставить, но остальные пункты оценивать независимо.

Задача 9.3. Эксперименты на удалёнке.

Экспериментатор Иннокентий Иванов провёл от удалённого источника постоянного напряжения провода в свою лабораторию. Уже находясь на своём рабочем месте, он вспомнил, что забыл измерить напряжение на выводах этого источника. Не растерявшись, Иннокентий взял резистор сопротивлением 20 Ом и присоединил его к концам проводов. Измерения показали, что напряжение на резисторе равно 9 В. Когда же он заменил этот резистор на другой, с сопротивлением 50 Ом, измеренное напряжение оказалось равным 12,5 В. Наконец, не меняя подключённого резистора, учёный срезал изоляцию с провода в двух местах на расстоянии 40 см друг от друга (с одной стороны от резистора) и измерил напряжение между этими точками. Теперь он получил значение 10 мВ. Чему равно напряжение на выводах источника и общая длина проводов? Провода, использованные Иннокентием, имеют постоянное сечение и сделаны из одного материала. Вольтметр учёного можно считать идеальным.

Ответ: 16,9 В, 175 м.

Решение: Определим сначала ток через резистор в первом и втором случае:

$$I_1 = \frac{9\ \text{В}}{20\ \text{Ом}} = 0{,}45\ \text{А}, \qquad I_2 = \frac{12{,}5\ \text{В}}{50\ \text{Ом}} = 0{,}25\ \text{А}.$$

Пусть λ — сопротивление единицы длины проводов, L — общая их длина, а U_0 — напряжение на выводах источника. Во втором и третьем эксперименте цепь одинаковая, поэтому

$$I_2 = \frac{0{,}01\ \text{В}}{\lambda \cdot 0{,}4\ \text{м}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{0{,}01\ \text{В}}{0{,}25\ \text{А} \cdot 0{,}4\ \text{м}} = 0{,}1\ \text{Ом/м}.$$

Запишем соотношения между напряжением на проводах и силой тока в них для первого и второго эксперимента:

$$\begin{cases} U_0 - 9\ \text{В} = I_1 \cdot \lambda L, \\ U_0 - 12{,}5\ \text{В} = I_2 \cdot \lambda L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_0 - 9\ \text{В}}{U_0 - 12{,}5} = \frac{I_1}{I_2} = 1{,}8 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 16{,}875\ \text{В} \approx 16{,}9\ \text{В}.$$

Отсюда получаем, что

$$L = \frac{U_0 - 9\ \text{В}}{I_1 \lambda} = \frac{16{,}875\ \text{В} - 9\ \text{В}}{0{,}45\ \text{А} \cdot 0{,}1\ \text{Ом/м}} = 175\ \text{м}.$$

Критерии:

1) Найдены токи через резисторы в первом и втором случаях . . . . . 1 балл
2) Найдено сопротивление единицы длины проводов . . . . . 1 балл
3) Записана связь между напряжением на источнике и силой тока в первом эксперименте . . . . . 2 балла
4) Записана связь между напряжением на источнике и силой тока во втором (третьем) эксперименте . 2 балла
5) Найдено напряжение на источнике U_0 . . . . . 2 балла
6) Найдена общая длина проводов . . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Числовые значения токов и λ находить не обязательно, учащимся достаточно записать соответствующие формулы. Кроме того, эти формулы могут быть частью выражений в пунктах 3, 4 и 6. В этом случае баллы за пункты 1 и/или 2 ставить автоматически.

Задача 9.4. Опыты по выходным.

Сидя дома в воскресенье, девочка Наташа решила поэкспериментировать. Она принесла из морозилки 100 г льда, положила в калориметр и налила туда 180 г воды. После установления теплового равновесия выяснилось, что в калориметре осталось 75 г нерастаявшего льда. Наташа повторила свой опыт, взяв из морозилки то же количество льда, но налив 270 г воды. В этот раз в калориметре осталось только 55 г нерастаявшего льда.

1. Определите начальную температуру воды, которую Наташа наливает в калориметр.
2. Какая масса льда будет в калориметре после установления теплового равновесия, если Наташа в третий раз повторит свой опыт, но нальёт в калориметр 27 г воды? Количество льда, взятого из морозилки, то же, что и в предыдущих опытах.

Начальная температура воды во всех трёх опытах была одинаковой. Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), льда — 2100 Дж/(кг·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг.

Ответ: 1) 17,5 ℃; 2) 109 г.

Решение: Пусть t — начальная температура воды. Температура льда в морозилке не равна нулю, поэтому льду, для того чтобы начать плавление, нужно передать некоторое количество теплоты Q. Запишем уравнения теплового баланса для первых двух опытов:

$$Q + \lambda(100\text{ г} - 75\text{ г}) = \text{c}_\text{в} \cdot 180\text{ г} \cdot (t - 0\,℃),$$

$$Q + \lambda(100\text{ г} - 55\text{ г}) = \text{c}_\text{в} \cdot 270\text{ г} \cdot (t - 0\,℃).$$

Вычитая их, находим

$$\lambda \cdot 20\text{ г} = \text{c}_\text{в} \cdot 90\text{ г} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\lambda \cdot 20\text{ г}}{\text{c}_\text{в} \cdot 90\text{ г}} \approx 17{,}5\,℃.$$

В третьем случае воды слишком мало, чтобы начать топить лёд. Наоборот, вода начнёт замерзать, и к 100 г льда добавится ещё Δm. Запишем ещё раз уравнение теплового баланса:

$$Q = \lambda\Delta m + \text{c}_\text{в} \cdot 27\text{ г} \cdot (t - 0\,℃).$$

Подставляя выражение для Q и t в первое уравнение, получаем

$$\lambda\Delta m + \text{c}_\text{в} \cdot 27\text{ г} \cdot t + \lambda \cdot 25\text{ г} = \text{c}_\text{в} \cdot 180\text{ г} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \lambda(25\text{ г} + \Delta m) = c_\text{в} \cdot 153\text{ г} \cdot t = \lambda \cdot 34\text{ г} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = 9\text{ г}.$$

Отсюда следует, что масса льда в третьем опыте будет равна 100 г + 9 г = 109 г.

Критерии:

1) Записано уравнение теплового баланса в первом случае . . . . 1 балл
2) Записано уравнение теплового баланса во втором случае . . . . 1 балл
3) Найдена начальная температура воды . . . . 2 балл
4) Записано уравнение теплового баланса в третьем случае . . . . 3 балла
5) Найдено Δm . . . . 2 балла
6) Найдена масса льда в третьем опыте . . . . 1 балл

Указание проверяющим: Для ориентировки, температура льда в морозилке равна −23,6 ℃.

Задача 9.5. Современное искусство.
На стене комнаты висит картина K высотой 0,9 м, верхний край которой находится на расстоянии 1,7 м от пола (см. рис. 9.1). Мальчик Паша решил, что картина висит вверх ногами, и положил на пол зеркало $З$. В результате оказалось, что минимальное расстояние от стены, на котором Паша может видеть в зеркале всю картину целиком, равно 2,7 м.
1. Чему равно расстояние от пола до глаз Паши?
2. Каково максимально возможное расстояние до стены, при котором мальчик будет видеть в зеркале всю картину?
Расстояние от краёв зеркала до стены равно 1,0 м и 2,5 м. Паша всегда рассматривает картину, не приседая и не подпрыгивая. Толщиной зеркала и картины пренебречь.

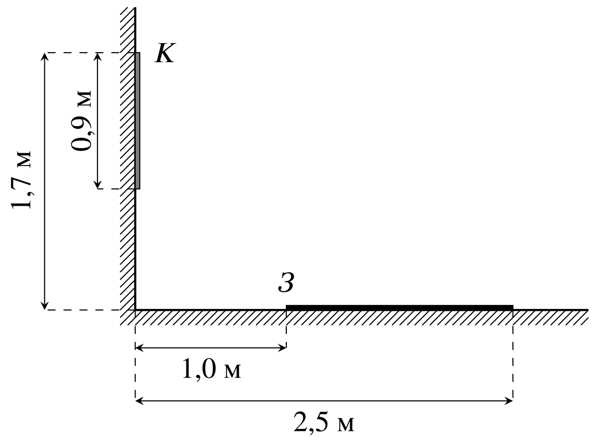

Рис. 9.1.

Ответ: 1) 1,36 м; 2) 4,5 м.

Решение: Отразим картину в зеркале. Проведём прямые, соединяющие верхний (по рис. 9.2) край отражения K' с краями зеркала. Они ограничивают область, из которой видно этот край картины. Сделаем теперь то же самое для нижнего края отражения K'. Пересечение полученных областей — это область, из которой видно и верхний, и нижний край картины (на рис. 9.2 закрашенная область).

Найдём расстояние h от пола до глаз Паши. Для этого проведём перпендикуляр к полу на расстоянии 2,7 м от стены до пересечения его с левой границей области видимости. Из подобия треугольников получим, что

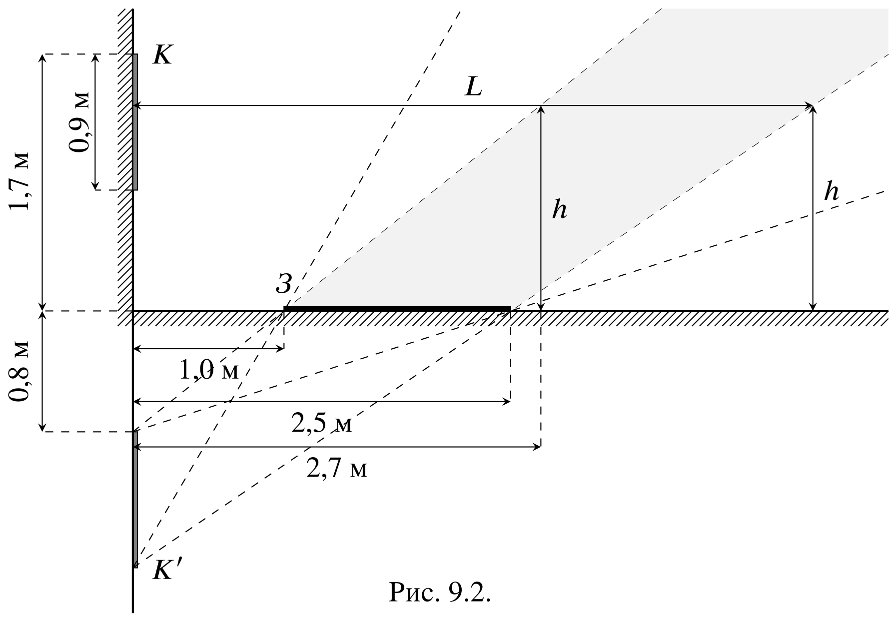

Рис. 9.2.

$$\frac{h}{2{,}7\text{ м} - 1{,}0\text{ м}} = \frac{0{,}8\text{ м}}{1{,}0\text{ м}} \quad \Rightarrow \quad h = 1{,}36\text{ м}.$$

Если L — максимальное расстояние, с которого Паша видит картину, то перпендикуляр к полу, построенный на расстоянии L от стены, должен пересекаться с правой границей области видимости на той же самой высоте h. Из подобия найдём, что

$$\frac{h}{L - 2{,}5\text{ м}} = \frac{1{,}7\text{ м}}{2{,}5\text{ м}} \quad \Rightarrow \quad L = 4{,}5\text{ м}.$$

Критерии:

1) Обоснованно определены границы области, из которой видно всю картину . . . . 2 балла
2) Записано правильное уравнение для нахождения h . . . . 2 балла
3) Найдено верное числовое значение h . . . . 2 балла
4) Записано правильное уравнение для нахождения L . . . . 2 балла
5) Найдено верное числовое значение L . . . . 2 балла

Указания проверяющим:

1) Область видимости может быть построена отличным от авторского способом. Нужно проверять обоснованность построения.
2) Если обоснование отсутствует, а учащийся просто провёл две границы, баллы за пункт 1 не ставить. Остальные пункты оцениваются независимо.

Максимально возможный балл в 9 классе 50