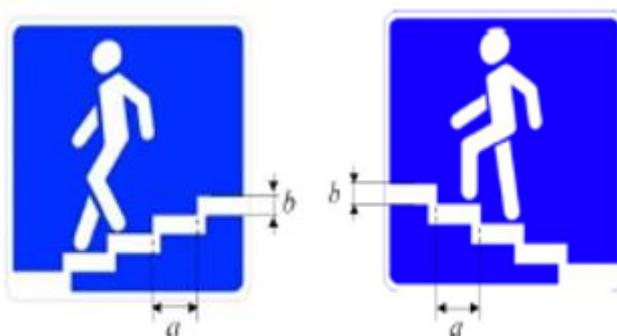


## 10 класс

### 10.1. (10 баллов) «Подземный переход».

Ступени лестницы имеют ширину  $a = 28$  см и высоту  $b = 15$  см. С какой максимальной установившейся скоростью  $u$  человек массой  $m = 70$  кг может идти вниз по такой лестнице, наступая на каждую ступеньку? Какую среднюю мощность  $P$  он должен развивать при подъёме по лестнице с этой скоростью?  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Ответ:**  $P \approx 590$  Вт.

**Решение:**

Центр масс человека опустится на  $b$  за минимальное время (свободное падение)

$$\tau = \sqrt{\frac{2b}{g}} \approx 0,18 \text{ с.} \quad (\text{принимается и } 0,2 \text{ с}).$$

Средняя горизонтальная составляющая скорости

$$u_x = \frac{a}{\tau}.$$

Среднее значение скорости человека

$$u = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot u_x = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\tau} \approx 1,8 \text{ м/с.} \quad (\text{для } \tau = 0,2 \text{ с } u = 1,6 \text{ м/с}).$$

Средняя сила, которую необходимо развивать мышцам человека, равна по модулю силе тяжести и направлена вверх. Поэтому средняя мощность при подъёме равна

$$P = \frac{mgb}{\tau} \approx 590 \text{ Вт} \quad (\text{для } \tau = 0,2 \text{ с } P = 525 \text{ Вт}).$$

*Критерии оценивания:*

Найдено время опускания с высоты одной ступеньки – 3 балла

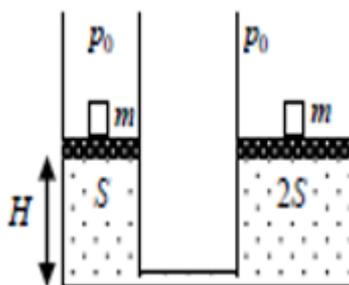
Найдена проекция средней горизонтальной скорости – 2 балла

Найдена установившаяся скорость человека – 2 балла

Найдена средняя мощность при подъёме человека вверх по лестнице – 3 балла

10.2. (10 баллов) «Кубики».

Два вертикальных цилиндра с сечением  $S$  и  $2S$ , соединенные снизу тонкой трубкой, заполнены идеальным газом и закрыты сверху подвижными невесомыми поршнями, находящимися изначально на одинаковой высоте  $H$  от основания. Давление  $p_0$  над поршнями атмосферное. Одновременно на оба поршня кладут кубики одинаковой массы  $m$ . В каком направлении сместятся поршни к тому моменту, когда система придет в новое равновесное состояние? Определите, на какие расстояния сместятся поршни. Температуру газа можно считать неизменной. Трение между стенками цилиндра и поршнем не учитывайте.



**Решение:**

Для того чтобы оба поршня находились над газом необходимо, чтобы под ними были давления  $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$  и  $p_2 = p_0 + \frac{mg}{2S}$  соответственно. Но так как сосуды сообщаются, то разные давления в правом левом сосуде невозможны. Газ полностью перетечет из левого сосуда в правый. Поэтому смещение левого поршня находится сразу  $h_1 = H$ .

Для определения смещения правого поршня запишем уравнение Клапейрона для начального и конечного состояния газа  $3p_0SH = \left(p_0 + \frac{mg}{2S}\right) \cdot 2S(h_2 + H)$ . Откуда  $h_2 = H \cdot \frac{p_0S - mg}{p_02S + mg}$ . Видно, что правый поршень может как подняться, так и опуститься в зависимости от массы кубика. Для нормального атмосферного давления  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$  высота кубика сделанного даже из ртути должна составлять около метра. Но если атмосфера разрежена, то такой вариант возможен.

*Критерии оценивания:*

Новое давление под поршнями – 2 балла

Описание нового состояния равновесия – 2 балла

Изменение высоты левого поршня – 1 балл

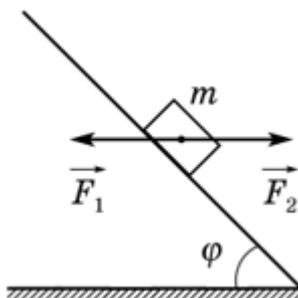
Уравнение Клапейрона для газа – 2 балла

Изменение высоты правого поршня – 2 балла

Анализ возможных вариантов подъема/опускания поршня – 1 балл

10.3. (10 баллов) «Горизонтальные силы».

На наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\varphi = 45^\circ$ , расположено тело массы  $m = 1$  кг (см.рис.). Коэффициент трения между плоскостью и телом  $k = 0,5$ . В первом случае на тело действуют горизонтальной силой  $F_1 = 5H$ , направленной влево, во втором случае действуют горизонтальной силой  $F_2 = 5H$ , направленной вправо. Чему равно отношение  $\alpha$  силы трения в первом и во втором случаях?



**Ответ:** 2.

**Решение:**

Рассмотрим случай, когда сила  $F$  направлена влево. Сумма проекций сил  $F$  и  $mg$  на наклонную плоскость равна  $\frac{1}{\sqrt{2}}(mg - F)$ . Нормальная реакция опоры  $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg + F)$ , а максимально возможное значение силы трения для этого случая равно  $F_{\text{тр}} = \frac{k}{\sqrt{2}}(mg + F)$ . Заметим, что это больше, чем сумма всех остальных сил вдоль наклонной плоскости. Следовательно, в первом случае сила трения равна силе трения покоя, то есть она равна  $F_{\text{тр.1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg - F)$ .

Теперь рассмотрим случай, когда сила  $F$  направлена вправо. Сумма проекций сил  $F$  и  $mg$  на наклонную плоскость равна  $\frac{1}{\sqrt{2}}(mg + F)$ . Нормальная реакция опоры  $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg + F)$ , а максимально возможное значение силы трения  $F_{\text{тр.2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}(mg + F)$ . Получаем, что в этом случае сила трения это сила трения скольжения, то есть она равна  $F_{\text{тр.2}}$ .

Разделив одну силу трения на другую получаем, что ответ:  $k^{-1} = 2$ .

*Критерии оценивания:*

Найдена нормальная реакция опоры в случае (1) – 1 балл

Найдена максимально возможная сила трения в случае (1) – 1 балл

Определена сила трения в случае (1) – 2 балла

Найдена нормальная реакция опоры в случае (2) – 1 балл

Найдена максимально возможная сила трения в случае (2) – 1 балл

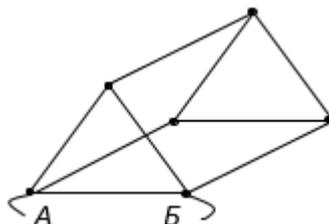
Определена сила трения в случае (2) – 2 балла

Получен ответ – 2 балла

10.4. (10 баллов) «Сопrotивление каркаса».

Определите сопротивление между точками  $A$  и  $B$  проволочного каркаса.

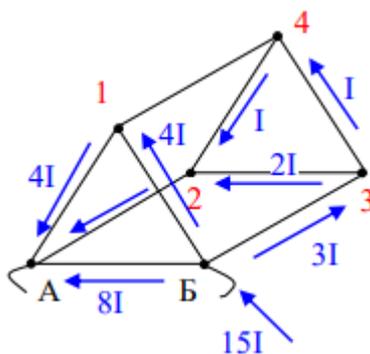
Сопротивление каждого прямолинейного участка проволоки равно  $R$ .



**Ответ:**  $\frac{8}{15}R$ .

**Решение:**

Для определенности пусть к точке  $B$  подключен плюс источника, а к точке  $A$  – минус. Тогда токи будут направлены от  $B$  к  $A$ . Расставим токи в ветвях цепи с учетом симметрии схемы и закона Ома: силы токов обратно пропорциональны сопротивлениям параллельных ветвей (см. рис.).



Начнем с дальнего конца схемы, так как там сила тока меньше по величине. Пусть сила тока, текущего от узла 3 к узлу 4 равна  $I$ . Тогда, в силу симметрии, от узла 4 к узлу 2 идет ток такой же силы  $I$ . Следовательно, по перемычке 41 ток не идет. В ветви 32 сила тока равна  $2I$ , так как её сопротивление в 2 раза меньше, чем ветви 342. Из закона сохранения заряда, следует, что сила тока, идущего от точки  $B$  к узлу 3 равна  $3I$ . Такой же ток идет от точки 2 к узлу  $A$ . Напряжение между  $B$  и  $A$  по контуру  $B32A$  равно:

$$3IR + 2IR + 3IR = 8IR.$$

Следовательно, в ветви  $BA$  сила тока равна  $8I$ , а в ветви  $B1A$   $4I$ . Общая сила тока, входящего в узел  $B$ , равна  $15I$ .

Общее сопротивление цепи равно отношению напряжения между  $A$  и  $B$  к общей силе тока.

$$R_0 = \frac{8IR}{15I} = \frac{8}{15}R.$$

*Критерии оценивания:*

Обоснование отсутствия тока в перемычке 41 – 2 балла

Расстановка токов в ветвях или последовательность эквивалентных преобразований, упрощающих схему – 6 баллов

Определение общего сопротивления – 2 балла

10.5. (10 баллов) «Плотность жидкостей».

Однажды экспериментатора Глюка попросили определить плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  двух неизвестных жидкостей по 1 литру которых находились в двух больших мерных цилиндрах. Непосредственное измерение оказалось невозможным, так как высота столба жидкостей в цилиндрах была недостаточной для использования имеющегося ареометра. Другой лабораторной посуды, устройств или измерительных приборов в распоряжении экспериментатора не оказалось. Для решения задачи Глюк начал добавлять по 200 мл жидкости из первого цилиндра во второй и измерять плотность получавшейся смеси (при этом глубина слоя жидкости была уже достаточной для использования ареометра). Результаты измерений представлены в таблице. В ней через  $V$  обозначен суммарный объём перелитой жидкости, а через  $\rho$  – плотность получившейся смеси.

$V$ , л	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
0,2	1130
0,4	1050
0,6	1000
0,8	980
1,0	960

Путём графической обработки полученных данных Глюк определил плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  обеих жидкостей. Какие значения плотностей он получил? Для ответа на этот вопрос постройте график измеренной зависимости, откладывая по осям координат такие физические величины, для которых эта зависимость является линейной функцией, а её график представляет собой прямую линию.

В данном эксперименте плотность жидкости измерялась с точностью 2%. Погрешностью измерения объёма можно пренебречь. Объём смеси равнялся сумме объёмов смешиваемых жидкостей.

**Ответ:**  $\rho_1 = (725 \pm 25)$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = (1220 \pm 70)$  кг/м<sup>3</sup>.

### Решение:

Обозначим через  $V_0 = 1$  л исходный объём жидкости во втором цилиндре,  $V$  – объём жидкости, добавленной из первого цилиндра во второй. Тогда плотность смеси во втором цилиндре:

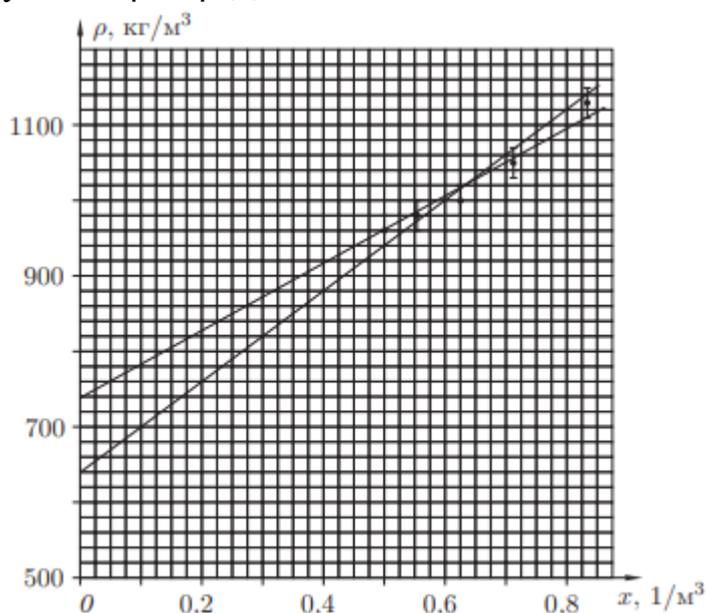
$$\rho = \frac{\rho_1 V + \rho_2 V_0}{V + V_0}.$$

Преобразуем полученное выражение. Для этого добавим и отнимем в числителе  $\rho_1 V_0$ :

$$\rho = \frac{(\rho_1 V + \rho_1 V_0) - \rho_1 V_0 + \rho_2 V_0}{V + V_0} = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \cdot \frac{V_0}{V + V_0}.$$

Введём новую переменную  $x = \frac{V_0}{V + V_0}$ . Тогда  $\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)x$ .

Построим график функции  $\rho = \rho(x)$ . Он линейен.



При  $x = 0$  плотность  $\rho = \rho_1$ , а угловой коэффициент графика  $k = \frac{\Delta\rho}{\Delta x} = \rho_2 - \rho_1$ . Отсюда находим:

$$\rho_2 = k + \rho_1.$$

Численно:

$$\rho_1 = (725 \pm 25) \text{ кг/м}^3, \rho_2 = (1220 \pm 70) \text{ кг/м}^3.$$

*Критерии оценивания:*

Записано выражение  $\rho(V)$  – 2 балла

$\rho(V)$  преобразовано к  $\rho \sim A + Bx$  – 2 балла

Построен график  $\rho(x)$  – 3 балла

Найдена плотность  $\rho_1$  – 1 балл

Определён угловой коэффициент  $k$  – 1 балл

Найдена плотность  $\rho_2$  – 1 балл