

10 класс

**Задача 10.1. Перекидывание камней.**

Из точек  $A$  и  $B$ , находящихся на одной горизонтальной поверхности, одновременно бросили два камня: первый — со скоростью  $v = 15$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, второй — под углом  $\beta = 60^\circ$  (см. рис. 10.1). Через какое время после броска камни окажутся на одной вертикали, если в процессе дальнейшего движения первый камень упал в точке  $B$ , а второй, наоборот, в точке  $A$ ? Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивление воздуха не учитывать.

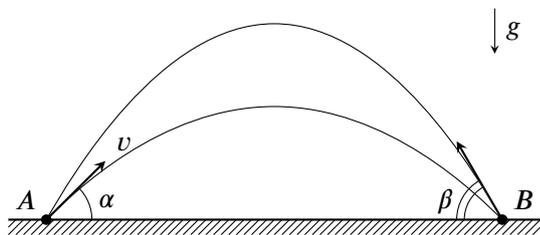


Рис. 10.1.

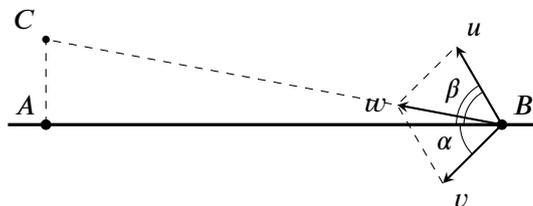


Рис. 10.2.

**Ответ:** 1,2 с.

**Решение:** Пусть второй камень бросили со скоростью  $u$ . Дальность полёта  $L$  равна, с одной стороны,  $L = v^2 \sin 2\alpha / g = v^2 / g$ , а с другой стороны,  $L = u^2 \sin 2\beta / g$ . Так как дальности полётов обоих камней равны,

$$\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\beta}{g} \Rightarrow u = v \sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}} = v \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

*Способ 1.* Обозначим  $t$  искомое время, тогда

$$vt \cos \alpha + ut \cos \beta = L \Rightarrow t = \frac{L}{v \cos \alpha + u \cos \beta} = \frac{v^2/g}{v/\sqrt{2} + v/\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{v}{g} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\sqrt{3}} \approx 1,2 \text{ с.}$$

*Способ 2.* Перейдём в систему отсчёта левого камня. В ней правый камень движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$  (рис. 10.2). Обозначим  $t$  искомое время, а  $w_x$  — проекцию скорости камня на горизонталь. За время  $t$  правый камень в новой системе отсчёта должен оказаться над точкой  $A$  в точке  $C$ , то есть  $L = w_x t$ . Так как  $w_x = v_x + u_x = v \cos \alpha + u \cos \beta$

$$L = w_x t = vt \cos \alpha + ut \cos \beta.$$

Дальнейшее решение совпадает с приведённым в Способе 1.

**Критерии:**

- 1) Записаны верные выражения для дальности полёта обоих камней . . . . . 1 балл
- 2) Найдена верная связь между начальными скоростями камней . . . . . 4 балла
- 3) Записано условие  $vt \cos \alpha + ut \cos \beta = L$  или аналог . . . . . 3 балла
- 4) Найдено верное значение искомого времени  $t$  . . . . . 2 балла

*Указания проверяющим:*

- 1) Если учащийся записал только одно выражение для дальности (в дальнейшем решении второго варианта не обнаружено), балл за пункт 1 не ставить. В этом случае баллов за пункт 2 быть не должно, так как связь между скоростями не может быть получена.
- 2) В пункте 4 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за все предыдущие пункты отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

**Задача 10.2. Кот и мышата.**

Озорные мышата подкрались к спящему в точке  $O$  коту Леопольду, дёрнули его за усы и одновременно бросились бежать со скоростью  $v$  по двум взаимно перпендикулярным прямым (см. рис. 10.3). Проснувшись и сообразив, что происходит, Леопольд побежал со скоростью  $5v$  вдогонку за первым мышонком, через время  $\tau$  догнал его и сразу же побежал ко второму.

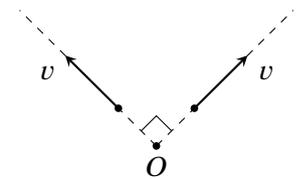


Рис. 10.3.

1. Через какое минимальное время после встречи с первым мышонком кот догонит второго?
2. Через какое минимальное время после встречи со вторым мышонком кот вернётся в точку  $O$ ? Скорость кота по величине не меняется.

**Ответ:** 1)  $5\tau/3$ ; 2)  $4\tau/3$ .

**Решение:** Расстояние от точки  $A$ , в которой Леопольд поймал первого мышонка, до точки  $O$  равно  $5v\tau$  (см. рис. 10.4). Пусть  $t$  — время погони за вторым мышонком, тогда расстояние  $AB$ , пройденное котом до встречи в точке  $B$ , равно  $5vt$ . Отсюда по теореме Пифагора

$$(vt + 5v\tau)^2 + (5v\tau)^2 = (5vt)^2 \Rightarrow t^2 + 10\tau t + 50\tau^2 = 25t^2 \Rightarrow 24t^2 - 10\tau t - 50\tau^2 = 0.$$

Решая это уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получим, что  $t = 5\tau/3$ . Вторым мышонком, таким образом, успел убежать от точки  $O$  на расстояние  $s = OB = vt + 5v\tau = 20v\tau/3$ , следовательно, время возвращения кота в точку  $O$  равно  $t' = s/(5v) = 4\tau/3$ .

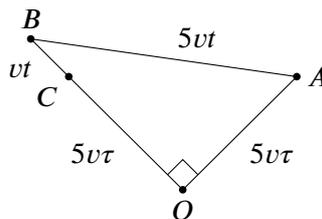


Рис. 10.4.

**Критерии:**

- |  |         |
|--|---------|
| 1) Найдено расстояние до места встречи с первым мышонком $OA = 5v\tau$ . . . . .             | 2 балла |
| 2) Записано верное уравнение для нахождения времени встречи $t$ со вторым мышонком . . . . . | 3 балла |
| 3) Найдено верное выражение для $t$ . . . . .  | 2 балла |
| 4) Найдено расстояние до места встречи со вторым мышонком $OB = 20v\tau/3$ . . . . .         | 2 балла |
| 5) Найден верный ответ на второй вопрос . . . . .  | 1 балл  |

*Указание проверяющим:* Требуемое в пункте 2 уравнение может быть отличным от авторского, но, тем не менее, корректным. Например, учащийся может записать теорему косинусов для треугольника  $ABC$ , найдя предварительно длину отрезка  $AC$ .

**Задача 10.3. Авария в далёком космосе.**

Однажды на Шаролёте, космическом корабле Смешариков, произошла авария, система отопления отключилась, и корабль стал остывать. Пин, поработав в своей мастерской, собрал автономный электрический обогреватель и включил его. В результате температура воздуха в Шаролёте установилась на отметке  $t_1 = 7^\circ\text{C}$ . Решив, что в корабле холодно, Пин увеличил силу тока в цепи обогревателя вдвое, из-за чего новая температура воздуха внутри корабля стала  $t_2 = 17^\circ\text{C}$ .

1. До какой температуры охладился бы воздух внутри Шаролёта, если бы Пин не собрал обогреватель?
2. Во сколько раз от первоначального значения нужно было увеличить силу тока в обогревателе, чтобы он прогрел воздух до температуры  $t_3 = 25^\circ\text{C}$ ?

Считать, что температура воздуха внутри Шаролёта везде одинакова, а сопротивление обогревателя и тепловая мощность, выделяемая Смешариками постоянны. Мощность, отдаваемая телом в космический вакуум за счёт излучения, пропорциональна  $(t + 273^\circ\text{C})^4$ , где  $t$  — температура тела (в  $^\circ\text{C}$ ).

**Ответ:** 1)  $3,4^\circ\text{C}$ ; 2) 2,58 раза.

**Решение:** Пусть  $N_0$  — суммарная тепловая мощность, выделяемая Смешариками, а  $N = I^2R$  — мощность нагревателя при начальной силе тока. Так как в этом случае температура воздуха в Шаролёте равна  $t_1$ ,  $N_0 + I^2R = k(280^\circ\text{C})^4$ , где  $k$  — неизвестный коэффициент. Во втором случае  $N_0 + 4I^2R = k(290^\circ\text{C})^4$ . Решая систему, получим, что

$$N_0 + 4I^2R = (290/280)^4(N_0 + I^2R) \Rightarrow N_0 + 4I^2R = 1,15N_0 + 1,15I^2R \Rightarrow N_0 = 19I^2R.$$

Пусть  $t_0$  — температура в Шаролёте, если обогреватель не включён. Тогда  $N_0 = k(t_0 + 273^\circ\text{C})^4$ . Подставляя найденное выражение для  $N_0$  и исключая  $k$ , получим

$$\frac{(t_0 + 273^\circ\text{C})^4}{(280^\circ\text{C})^4} = \frac{19I^2R}{20I^2R} \Rightarrow t_0 + 273^\circ\text{C} = 280^\circ\text{C} \cdot \sqrt[4]{\frac{19}{20}} \approx 276,4^\circ\text{C} \Rightarrow t_0 = 3,4^\circ\text{C}.$$

В третьем случае  $N_0 + I_3^2R = k(298^\circ\text{C})^4$ , где  $I_3$  — сила тока в обогревателе, откуда следует, что

$$\frac{298^4}{280^4} = \frac{19I^2R + I_3^2R}{20I^2R} \Rightarrow 1,283 = \frac{19}{20} + \frac{I_3^2}{20I^2} \Rightarrow I_3 = 2,58I.$$

**Критерии:**

- |  |         |
|--|---------|
| 1) Записано уравнение $N_0 + I^2R = k(280^\circ\text{C})^4$ или аналог   | 2 балла |
| 2) Записано уравнение $N_0 + 4I^2R = k(290^\circ\text{C})^4$ или аналог  | 2 балла |
| 3) Найдена верная связь между мощностью Смешариков и обогревателя        | 1 балл  |
| 4) Найден верный ответ на первый вопрос                                  | 2 балла |
| 5) Записано уравнение $N_0 + I_3^2R = k(298^\circ\text{C})^4$ или аналог | 1 балл  |
| 6) Найден верный ответ на второй вопрос                                  | 2 балла |

*Указание проверяющим:*

- 1) В зависимости от точности расчётов, учащийся может получить слегка отличные значения, например:  $(290/280)^4 \approx 1,151$ ,  $N_0 = 18,9I_0^2R$ . На числовые значения ответов на вопросы задачи это почти не влияет.
- 2) В пункте 4 ответ может быть дан в кельвинах:  $t_0 = 276,4\text{ К}$  или даже  $t_0 = 276\text{ К}$ . В этом случае баллы за этот пункт не снижать, если есть явное упоминание кельвинов как единиц измерения.

**Задача 10.4. Нелинейные элементы.**

Физик-экспериментатор Иннокентий Иванов собрал электрическую цепь, состоящую из соединённых последовательно нелинейного элемента  $X$ , резистора сопротивлением  $R$ , идеального амперметра, ключа и источника постоянного напряжения  $U_0 = 24$  В. После замыкания ключа амперметр показал значение  $I_1 = 500$  мА. Учёный разомкнул цепь и подсоединил параллельно к элементу  $X$  второй, точно такой же нелинейный элемент. После повторного замыкания ключа амперметр показал значение  $I_2 = 640$  мА.

1. Определите сопротивление резистора  $R$ .
2. Какое значение показал бы амперметр, если бы в цепи нелинейные элементы были соединены последовательно?

Известно, что сила тока, проходящего через элемент  $X$ , пропорциональна квадрату приложенного к нему напряжения, то есть  $I \sim U^2$ . Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

**Ответ:** 1) 20 Ом; 2) 237 мА.

**Решение:** Пусть зависимость силы тока через нелинейный элемент от напряжения на нём задаётся формулой  $I = kU^2$ , где  $k$  — неизвестный коэффициент. В первом случае  $U_0 = I_1 R + \sqrt{I_1/k}$ . Во втором случае через один нелинейный элемент течёт ток  $I_2/2$ , поэтому  $U_0 = I_2 R + \sqrt{I_2/(2k)}$ . Исключая отсюда  $k$ , получим, что

$$\frac{U_0 - I_2 R}{U_0 - I_1 R} = \sqrt{\frac{I_2}{2I_1}} = 0,8 \Rightarrow U_0 - I_2 R = 0,8U_0 - 0,8I_1 R \Rightarrow R = \frac{0,2U_0}{I_2 - 0,8I_1} = 20 \text{ Ом.}$$

Коэффициент  $k$ , соответственно, равен

$$k = \frac{I_1}{(U_0 - I_1 R)^2} = \frac{0,5 \text{ А}}{(24 \text{ В} - 10 \text{ В})^2} = \frac{1}{392} \text{ А/В}^2.$$

Если нелинейные элементы соединены последовательно, то в цепи течёт ток  $I_3$ , который определяется уравнением  $U_0 = I_3 R + 2\sqrt{I_3/k}$ . Решая его, найдём, что

$$\sqrt{I_3} = \frac{-1 + \sqrt{1 + RU_0 k}}{R\sqrt{k}} \Rightarrow I_3 = \frac{(-1 + \sqrt{1 + RU_0 k})^2}{R^2 k} \approx 0,237 \text{ А.}$$

**Критерии:**

- 1) Записано уравнение  $U_0 = I_1 R + \sqrt{I_1/k}$  или аналогичное для первого случая . . . . . 2 балла
- 2) Записано уравнение  $U_0 = I_2 R + \sqrt{I_2/(2k)}$  или аналогичное для второго случая . . . . . 2 балла
- 3) Найдено верное значение сопротивления  $R$  . . . . . 2 балла
- 4) Записано уравнение  $U_0 = I_3 R + 2\sqrt{I_3/k}$  или аналогичное для третьего случая . . . . . 2 балла
- 5) Найдено верное значение силы тока в третьем случае . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

В пункте 5 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за все предыдущие пункты отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

**Задача 10.5. Под углом.**

Систему из двух брусков одинаковой массы  $m = 0,7$  кг, находящихся на горизонтальной поверхности, тянут вправо, прикладывая горизонтальную силу  $F = 5$  Н. Найдите ускорение системы, если коэффициент трения между левым бруском и поверхностью равен  $\mu = 2/5$ , а между правым бруском и поверхностью трение отсутствует. Нить, соединяющая бруски, образует угол  $\alpha$  с горизонталью (см. рис. 10.5), такой, что  $\sin \alpha = 5/13$ . Нить считать невесомой и нерастяжимой, ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха пренебречь.

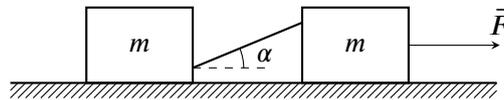


Рис. 10.5.

**Ответ:** 2 м/с<sup>2</sup>.

**Решение:** Пусть  $a$  — ускорение системы, а  $T$  — сила натяжения нити. Запишем 2й закон Ньютона для правого тела в проекции на горизонтальную ось:

$$ma = F - T \cos \alpha = F - 12T/13.$$

Для левого тела также запишем 2й закон Ньютона в проекции на обе оси: горизонтальную  $Ox$  и вертикальную  $Oy$  (здесь  $N$  — сила реакции опоры,  $F_{тр}$  — сила трения, действующие на левый брусок)

$$(Ox) \quad ma = T \cos \alpha - F_{тр} = 12T/13 - F_{тр}, \quad (Oy) \quad 0 = N - mg + T \sin \alpha = N - mg + 5T/13.$$

Если система движется,  $F_{тр} = \mu N$ . Отсюда

$$ma = 12T/13 - \mu(mg - 5T/13) = 12T/13 - 2mg/5 + 2T/13 = 14T/13 - 2mg/5.$$

Сопоставляя это с первым уравнением, получим

$$F - 12T/13 = 14T/13 - 2mg/5 \Rightarrow T = F/2 + mg/5 = 2,5 \text{ Н} + 1,4 \text{ Н} = 3,9 \text{ Н}.$$

Ускорение системы, соответственно, равно

$$a = \frac{F - 12T/13}{m} = \frac{5 \text{ Н} - 3,6 \text{ Н}}{0,7 \text{ кг}} = 2 \text{ м/с}^2.$$

**Критерии:**

- 1) Правильно записан 2й ЗН для правого тела в горизонтальной проекции  $ma = F - T \cos \alpha$  . . . . . 2 балла
- 2) Правильно записан 2й ЗН для левого тела в горизонтальной проекции  $ma = T \cos \alpha - F_{тр}$  . . . . . 3 балла
- 3) Найдено верное выражение для силы реакции у левого бруска  $N = mg - T \sin \alpha$  . . . . . 3 балла
- 4) Найдено верное значение ускорения . . . . . 2 балла