11 класс

11.1. (*10 баллов*) «Разлёт зарядов».

Вдоль одной прямой расположены две пары скрепленных зарядов. Величины зарядов и их массы указаны на рисунке 1.

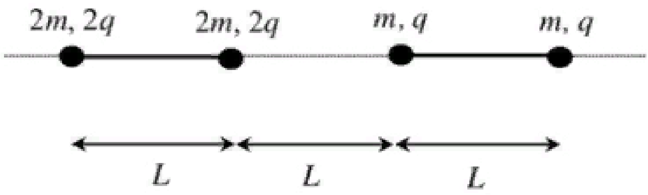


Рисунок 1

С какими ускорениями начнут разлетаться эти пары? Считайте движение пар зарядов поступательным. Расстояние L, заряд q и масса m заданы.

Решение:

Для правой пары зарядов запишем второй закон Ньютона:

$$2kq^2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{2}{(2L)^2}+\frac{1}{(3L)^2}\right)=2ma_1,$$

где a_1 — ускорение этой пары. Из записанного уравнения находим ускорение:

$$a_1=\frac{29kq^2}{18L^2}.$$

По третьему закону Ньютона, на левую пару зарядов со стороны правой действует такая же по величине сила. Однако масса левой пары в два раза больше, поэтому её ускорение

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{29kq^2}{36L^2}.$$

Так как система замкнута, мы можем воспользоваться законами сохранения импульса и энергии, причем, энергию взаимодействия зарядов внутри пары не будем учитывать, так как она не изменяется.

$$\frac{kq2q}{L}+\frac{kq2q}{2L}+\frac{kq2q}{2L}+\frac{kq2q}{3L}=\frac{2m{u_1}^2}{2}+\frac{2\cdot 2m{u_2}^2}{2}$$

$$\text{и } 0=2mu_1-2\cdot 2mu_2,$$

где u_1 — скорость правой пары, u_2 — скорость левой пары.

Из этой системы уравнений получаем $u_1=\frac{2q}{3}\sqrt{\frac{7k}{Lm}}$ и $u_2=\frac{q}{3}\sqrt{\frac{7k}{Lm}}$.

Критерии оценивания:

Получено выражение для силы взаимодействия двух пар зарядов – 1 балл

Найдены ускорения a_1, a_2 – 2 балла

Записан закон сохранения энергии – 2 балла

Записан закон сохранения импульса – 2 балла

Решение системы – 3 балла

11.2. (*10 баллов*) «Два шарика и пружина».

На легкой пружине закреплен небольшой по размерам шарик, как показано на рисунке 2. Другой конец пружины прикреплен к горизонтальному столу. С высоты h без начальной скорости отпускают второй точно такой же шарик.

Рисунок 2

Известно, что после первого центрального упругого удара, следующее столкновение шаров происходит, когда первый шар оказывается в нижней точке своей траектории. Чему равно время между первым и вторым столкновениями шаров?

Ответ: $\tau = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Решение 1:

Энергия упругой деформации пружины с лежащим на ней шариком

$$U_1 = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 \qquad (1)$$

где $k\Delta L = mg$. (2)

Пусть после столкновения шариков длина пружины уменьшилась ещё на L. Теперь энергия пружины равна

$$U_2 = \frac{1}{2}k(L + \Delta L)^2, \qquad (3)$$

а изменение энергии

$$U_{12} = \frac{1}{2}k(L + \Delta L)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = \frac{1}{2}kL^2 + kL\Delta L. \quad (4)$$

Так как столкновение шариков абсолютно упругое, шарики обмениваются импульсами.

Из закона сохранения энергии следует:

$$mg(h + L) = \frac{1}{2}kL^2 + kL\Delta L,$$

или, с учётом уравнения (2):

$$mgh = \frac{1}{2}kL^2. \qquad (5)$$

Для пружинного маятника справедливо соотношение:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}. \qquad (6)$$

Отсюда уравнение (5) примет вид:

$$gh = \frac{1}{2}\omega^2 L^2 = \frac{2\pi^2}{T^2} L^2. \qquad (7)$$

Падение первого шарика можно описать уравнением:

$$L = \frac{g\tau^2}{2}, \text{где } \tau = \frac{T}{4}. \qquad (8)$$

Из (4) и (5) следует:

$$\frac{ghT^2}{2\pi^2} = L^2 = \left(\frac{g}{2}\left(\frac{T}{4}\right)^2\right)^2.$$

После алгебраических преобразований получим: $\tau = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Критерии оценивания:

Получено выражение для изменения потенциальной энергии пружины после столкновения шариков (уравнение (4)) – 3 балла

за запись изменения потенциальной энергии пружины – 2 балла

за указание на обмен импульсами шаров во время столкновения – 1 балл

Установлена связь между высотой h и сжатием пружины L (уравнение (5)) – 2 балла

Приведено уравнение для частоты колебания груза на пружине (6) – 1 балл

Выражение для времени τ, прошедшего между первым и вторым столкновениями (уравнение (8)) – 2 балла

Получено окончательное выражение для времени τ – 2 балла

Решение 2:

Скорость второго шарика перед столкновением $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$. (1)

При центральном упругом соударении шарики обмениваются импульсами, поэтому сразу после столкновения $\upsilon_2 = 0$, $\upsilon_1 = \upsilon_0$.

Между первым и вторым столкновениями перемещение шариков $S = A$, где A – амплитуда возникших колебаний первого шарика.

Второй шарик падает свободно, поэтому $A = \frac{g\tau^2}{2}$ (2)

Первый шар движется по гармоническому закону, поэтому $A = \frac{\upsilon_m}{\omega}$, (3)

где $\upsilon_m = \upsilon_0$ – амплитуда скорости.

Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, (4)

Между столкновениями проходит четверть периода: $T = 4\tau$. (5)

Из (2) - (5) получим:

$$\frac{g\tau^2}{2} = \frac{\upsilon_0 4\tau}{2\pi},$$

откуда следует $\tau = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Критерии оценивания:

Записана формула (1) – 1 балл

Указано, что шарики обменялись импульсами – 1 балл

Записана формула (2) – 1 балл

Приведено соотношение (3) – 3 балла

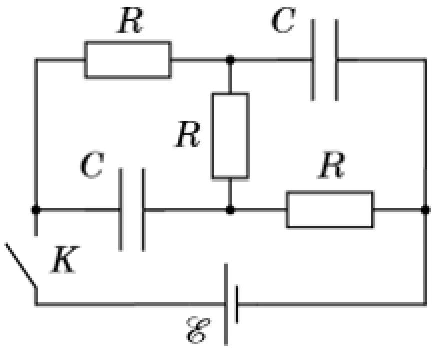
Приведено соотношение (4) – 1 балл

Приведено соотношение (5) – 1 балл

Получен ответ – 2 балла

11.3. (*10 баллов*) «RC - мост».

Из трех одинаковых резисторов сопротивлением *R* и двух одинаковых конденсаторов электрической ёмкостью *C* собрана электрическая цепь (мостовая схема) и через ключ подключена к идеальной батарейке. Первоначально конденсаторы не заряжены.



1) Определите силу тока и его направление в каждом изрезисторов сразу после замыкания ключа. Сделайтепоясняющий рисунок № 1.

2) Определите силу тока и его направление в каждом из резисторов по истечение продолжительного времени, прошедшего после замыкания ключа. Сделайте поясняющий рисунок № 2.

3) Какие заряды (укажите величину и полярность) установятся на конденсаторах спустя длительное время после замыкания ключа? Знаки зарядов пластин конденсатора укажите на рисунке № 2.

Решение:

1) Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторах равно нулю. Поэтому точки, между которыми подключены конденсаторы, в начальный момент времени имеют равные потенциалы. На рисунке №1 показаны точки равных потенциалов. Сила токов, текущих через каждый из

резисторов, $I_1 = \frac{\varepsilon}{R}$. Направления токов указаны на рисунке.

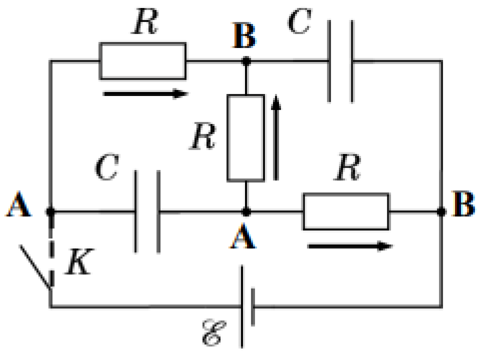


Рисунок №1

2) Когда конденсаторы зарядятся, ток в цепи будет течь только через резисторы, а эквивалентное сопротивление цепи будет равно $3R$. Сила тока, текущего через резисторы, будет равна $I_2 = \frac{\varepsilon}{3R}$. Направления токов указаны на рисунке №2.

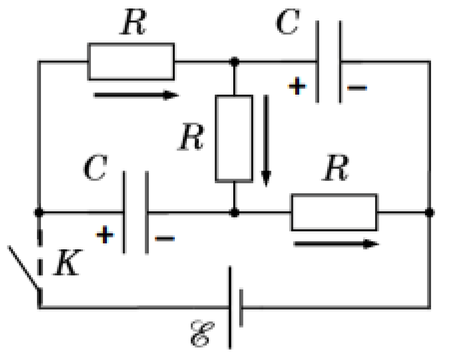


Рисунок №2

3) Напряжения на конденсаторах определяются падением напряжения на резисторах по закону Кирхгофа. В нашем случае $U_c = 2R \cdot I_2 = \frac{2}{3}\varepsilon$, $q = U_c C = \frac{2}{3}\varepsilon C$. Полярность конденсаторов указана на рисунке №2.

Критерии оценивания:

Определена сила тока в резисторах (задание 1) – 2 балла

На поясняющем рисунке №1 расставлены направления токов через резисторы (если все три указаны правильно) – 1 балл

Определена сила тока в резисторах (задание 2) – 2 балла

На поясняющем рисунке №2 расставлены направления токов через резисторы (если все три указаны правильно) – 1 балл

Определено напряжение на конденсаторах – 2 балла

Определена величина заряда на каждом из конденсаторов – 1 балл

Расставлены знаки зарядов на пластинах конденсаторов (если все указаны правильно) – 1 балл

11.4. (*10 баллов*) «Увеличиваем КПД».

Если нагревать воду от комнатной температуры до температуры кипения в массивном чайнике, заполненном наполовину, то КПД процесса составит $\eta_1 = 0{,}85$. Чему станет равен КПД нагревания полного чайника? Полезным эффектом является нагревание именно воды. Тепловыми потерями в окружающую среду пренебречь.

Ответ: 0,92.

Решение:

По определению КПД:

$$\eta_1 = \frac{C_1 \Delta t}{(C_1 + C_0)\Delta t}$$

где C_1 – теплоемкость жидкости в первом опыте, C_0 – теплоемкость чайника, Δt – изменение температуры содержимого чайника.

Во втором случае:

$$\eta_2 = \frac{2C_1 \Delta t}{(2C_1 + C_0)\Delta t}.$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\eta_2 = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + 1} = 0{,}92\,.$$

Критерии оценивания:

Выражение для η_1 – 3 балла

Выражение для η_2 – 4 балла

Решение системы и численный ответ – 3 балла

11.5. (*10 баллов*) «Цилиндрический сосуд».

Цилиндрический сосуд с внешним радиусом $R = 5$ см и высотой стенок $H = 30$ см закрыт очень лёгкой и прочной цилиндрической крышкой такого же радиуса. Крышка плотно прижата к торцу стенки сосуда растянутой пружиной, закреплённой в центрах крышки и дна сосуда (см.рис.3).

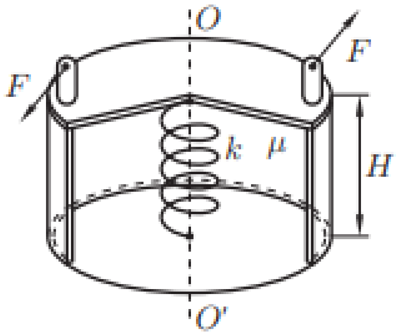


Рисунок 3

Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $L = 10$ см. Если задать температуру T_1 воздуха в сосуде, затем закрыть крышку и дождаться установления теплового равновесия воздуха в сосуде с окружающей средой, температура которой равна $\text{T}_0 = 300\ \text{К}$, то для поворачивания крышки закрытого сосуда на малый угол относительно оси сосуда к ней необходимо приложить силы, суммарный момент которых равен M. Экспериментальная зависимость M от T_1 с указанием погрешности измерения M представлена в таблице.

№	T_1, К	M, Н·м	$\Delta\text{М}/\text{М}$, %
1	240	0,58	10
2	260	1,38	10
3	280	1,85	10
4	300	2,66	10
5	350	3,48	5
6	400	4,31	5
7	450	5,06	5
8	500	5,50	5
9	600	6,25	5

Постройте график зависимости M от отношения T_0/T_1. Определите с его помощью коэффициент жёсткости пружины k и коэффициент трения μ между крышкой сосуда и торцом его стенки. Оцените погрешность определения указанных величин.

Векторы прикладываемых к крышке сил параллельны плоскости крышки. Толщина стенок сосуда много меньше его радиуса. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Решение:

Рассмотрим силы, действующие на крышку. Вниз на неё действует сила атмосферного давления p_0S и сила упругости пружины (по условию пружина растянута): $F_{\text{пр}} = k(H - L)$, где S – площадь крышки ($S = \pi R^2$). Вверх на крышку действует сила упругости N со стороны стенок сосуда и сила давления воздуха, находящегося внутри сосуда, которая равна p_1S. По условию задачи толщина стенок сосуда много меньше его радиуса, поэтому разницей площадей внутренней и внешней стороны крышки пренебрежем.

Из условия неподвижности крышки в вертикальном направлении следует равенство нулю суммы проекций сил на это направление:

$$N + p_1S - p_0S - K(H - L) = 0 \qquad (1)$$

Отсюда

$$N = K(H - L) + (p_0 - p_1)S. \quad (2)$$

При поворачивании закрытой крышки вокруг оси сосуда между крышкой и торцом стенки сосуда действует сила трения скольжения, равная $F_{тр} = \mu N$. По условию задачи стенки сосуда тонкие, поэтому можно считать, что момент силы трения относительно оси сосуда равен $M_{тр} = F_{тр}R = \mu NR$. Для поворачивания крышки момент внешней силы должен превысить момент силы трения скольжения. Отсюда в предельном случае имеем равенство:

$$M = \mu R(K(H - L) + (p_0 - p_1)S), \quad (3)$$

Определим, как зависит давление p_1 от температуры T_1. По закону Менделеева–Клапейрона для порции воздуха в открытом охлаждённом сосуде:

$$p_0 V = \nu R T_1,$$

где V – объём сосуда, ν – количество молей воздуха в нём. Для той же порции газа в закрытом, нагретом до T_0 сосуде:

$$p_1 V = \nu R T_0.$$

Следовательно,

$$p_1 = p_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right),$$

и условие (3) приобретает вид:

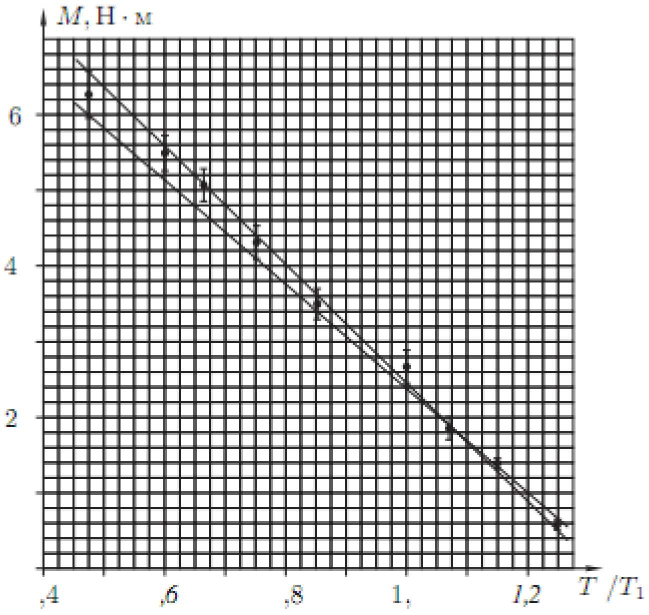
$$M = \mu R \left[K(H - L) + p_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) S\right] = \mu R K(H - L) + \mu p_0 \pi R^3 - \mu p_0 \pi R^3 \frac{T_0}{T_1}.$$

Видно, что зависимость M от (T_0/T_1) представляет собой линейную функцию. Определив с помощью графика угловой коэффициент $\mu p_0 \pi R^3$ этой функции, вычислим значение коэффициента трения. Точка пересечения продолжения графика с осью M_0 соответствует величине:

$$\mu R K(H - L) + \mu p_0 \pi R^3, \quad (4),$$

откуда находим коэффициент жёсткости пружины.

Экспериментальная зависимость $M\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$ представлена на рисунке.



Через полученные точки с учётом погрешности измерений можно провести прямые 1 и 2 с минимально возможным и максимально возможным наклоном, соответственно. Для прямой 1 получаем минимальное значение $\mu = 0{,}18$. Для прямой 2 максимальное значение $\mu = 0{,}20$. Из полученных результатов можно сделать вывод:

$$\mu = 0{,}19 \pm 0{,}1.$$

Критерии оценивания:

Найдена реакция N опоры – 1 балл

Записано неравенство для моментов сил – 1 балл

Записано условие (2) – 1 балл

Найдено давление p_1 – 1 балл

Записано условие (3) – 2 балла

Построен график $M\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$ – 2 балла

Найден коэффициент k – 1 балл

Определён коэффициент трения μ – 1 балл