11 класс

Максимальное время для решения 230 минут

Задача №1. (10 баллов)

Два мальчика играли с мячами. Находясь рядом друг с другом, они одновременно бросили свои мячи: один мальчик бросил мяч под углом $\alpha = 30°$, а другой под углом $\beta = 60°$ к горизонту. Оказалось, что мячи одновременно упали на землю на расстоянии $\Delta L = 4$ м друг от друга. В первом случае мальчики смотрели в одну сторону, во втором – в разные стороны, при этом ΔL были одинаковыми. Определите начальные скорости тел в двух случаях. Траектории движения мячей лежат в одной плоскости. Принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что поверхность земли горизонтальная и броски мячей происходят из одной точки.

Возможное решение.

Обозначим начальную скорость первого мяча v_1, второго мяча – v_2. Мячи приземляются одновременно, следовательно, времена их полёта равны:

$t_1 = t_2 \rightarrow \frac{2v_1 sin\alpha}{g} = \frac{2v_2 sin\beta}{g}$, получаем $v_1 \sin 30° = v_2 \sin 60°$, $v_1 = \sqrt{3}v_2$.

<u>Первый случай</u>: точки падения мячей находятся по одну сторону от точки бросания.

В данном случае $\Delta L = L_1 - L_2 = \frac{{v_1}^2 sin2\alpha}{g} - \frac{{v_2}^2 sin2\beta}{g} = \frac{{v_1}^2 sin60°}{g} - \frac{{v_2}^2 sin120°}{g} = \frac{{v_1}^2\sqrt{3}}{2g} - \frac{{v_2}^2\sqrt{3}}{2g} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2g}({v_1}^2 - {v_2}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2g}(3{v_2}^2 - {v_2}^2) = \frac{\sqrt{3}{v_2}^2}{g}$.

Откуда скорости мячей ${v_2}^2 = \frac{g\Delta L}{\sqrt{3}}$; $v_2 = \sqrt{\frac{g\Delta L}{\sqrt{3}}} \approx 4{,}8$ м/с; $v_1 = \sqrt{3}v_2 \approx 8{,}3$ м/с.

<u>Второй случай</u>: точки падения мячей находятся по разные стороны от точки бросания.

Здесь $\Delta L = L_1 + L_2 = \frac{{v_1}^2 sin2\alpha}{g} + \frac{{v_2}^2 sin2\beta}{g} = \frac{{v_1}^2 sin60°}{g} - \frac{{v_2}^2 sin120°}{g} = \frac{{v_1}^2\sqrt{3}}{2g} + \frac{{v_2}^2\sqrt{3}}{2g} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2g}({v_1}^2 + {v_2}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2g}(3{v_2}^2 + {v_2}^2) = \frac{2\sqrt{3}{v_2}^2}{g}$.

Скорости мячей ${v_2}^2 = \frac{g\Delta L}{2\sqrt{3}}$; $v_2 = \sqrt{\frac{g\Delta L}{2\sqrt{3}}} \approx 3{,}4$ м/с; $v_1 = \sqrt{3}v_2 \approx 5{,}9$ м/с.

Критерии оценивания.

Записана формула для времени полёта для каждого мяча	1 балл
Записано условие равенства времён полета	1 балл
Найдена связь между начальными скоростями	2 балла
Получена связь между ΔL и одной из скоростей v_1 или v_2 в первом случае	2 балла
Получена связь между ΔL и одной из скоростей v_1 или v_2 во втором случае	2 балла
Найдены скорости v_1 и v_2 в первом случае	1 балл
Найдены скорости v_1 и v_2 во втором случае	1 балл

Задача №2. (10 баллов)

Одним из опытов по определению ускорения свободного падения служит скольжение тела с наклонной плоскости. Ознакомившись с этим опытом, ученик изучил зависимость времени соскальзывания бруска с наклонной плоскости от угла ее наклона к горизонту. При этом начальная скорость бруска равна нулю.

Для проведения опыта ученик взял плоскость длиной $L = 55$ см и брусок, размеры которого малы по сравнению с размерами плоскости. В начале и в конце плоскости он установил датчики контроля времени. Поднимая плоскость за один край, измерялся угол наклона посредством изменения высоты H подъема этого края относительно другого края плоскости, который имел фиксированное положение. Данные измерений были занесены в таблицу.

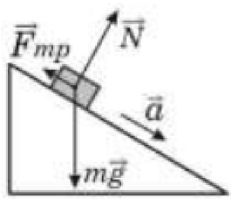
H, см	t, с	H, см	t, с	H, см	t, с
6	Брусок не скользит	18	Брусок не скользит	30	8,43
8		20		32	7,39
10		22	58,34	34	6,63
12		24	20,31	36	5,93
14		26	13,01	38	5,57
16		28	10,00	40	5,23

Пользуясь этими данными определите:

1) коэффициент трения бруска о наклонную плоскость;

2) численное значение ускорения свободного падения.

Возможное решение.



Рассмотрим движение бруска с наклонной плоскости. Силы, действующие на брусок в процессе его соскальзывания: $\vec{N}$ – сила реакции опоры, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, $m\vec{g}$ – сила тяжести. Запишем второй закон Ньютона:

$\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

Ось X направим вдоль наклонной плоскости вниз, ось Y – вверх перпендикулярно оси X. Угол наклона плоскости к горизонту обозначим α. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси:

$ma = mg\, sin\alpha - F_{\text{тр}}$;

$0 = N - mg\, cos\alpha$.

Брусок скользит, следовательно, можем записать $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Выразим из этих уравнений ускорение $a = g(sin\alpha - \mu\, cos\alpha)$.

Таким образом, ускорение пропорционально величине $(sin\alpha - \mu\, cos\alpha)$, а коэффициент пропорциональности равен ускорению свободного падения. Соскальзывание бруска возможно, если $sin\alpha > \mu\, cos\alpha$, откуда следует, что $\mu < tg\alpha$.

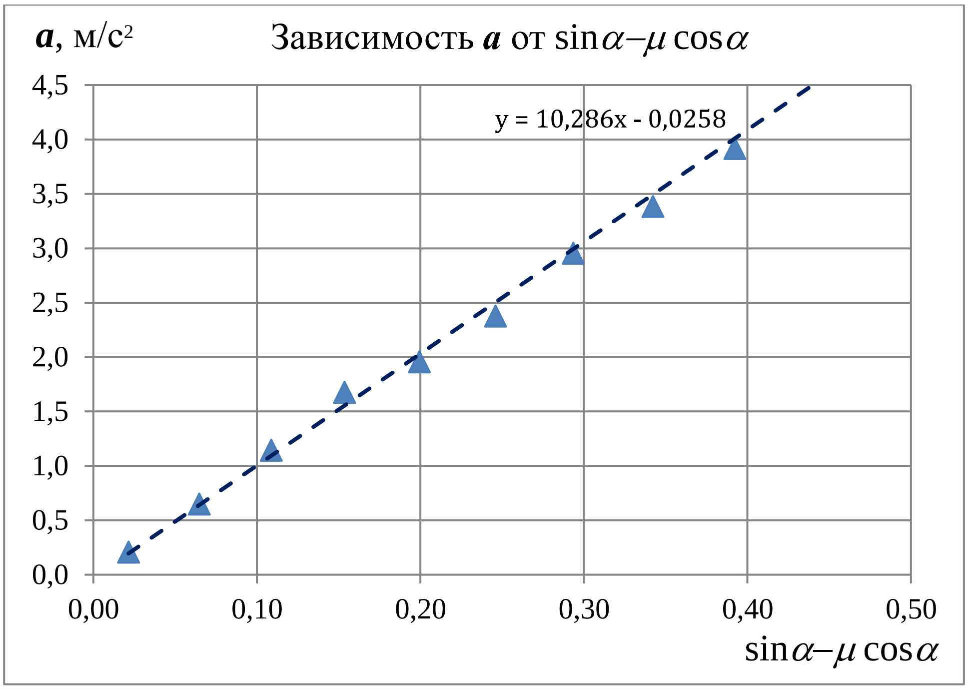
Из таблицы измерений следует, что брусок начинает соскальзывать с наклонной плоскости при H от 20 до 22 см. Рассчитаем, при каком коэффициенте трения будут выполняться эти условия $sin\alpha = \frac{H}{L}$, $\mu = tg\alpha = tg(arcsin(\frac{H}{L}))$.

$\mu_1 = tg(\arcsin(\frac{20}{55})) = 0{,}390$, $\mu_2 = tg(\arcsin(\frac{22}{55})) = 0{,}436$. Коэффициент трения $\mu = 0{,}413$.

Зная коэффициент трения, построим график зависимости ускорения бруска $\boldsymbol{a}$ от $(sin\alpha - \mu\, cos\alpha)$. Эта зависимость должна получиться линейной, т.е. графиком будет являться прямая с угловым коэффициентом наклона равным g. Ускорение бруска рассчитаем по формуле $a = \frac{2L}{t^2}$. Результаты расчета для каждого опыта представлены в таблице.

H, м	t, с	a, м/с^2	$sin\alpha – \mu\, cos\alpha$
0,22	2,29	0,21	0,021
0,24	1,30	0,65	0,065
0,26	0,98	1,15	0,109
0,28	0,81	1,68	0,154
0,3	0,75	1,96	0,199
0,32	0,68	2,38	0,246
0,34	0,61	2,96	0,294
0,36	0,57	3,39	0,342
0,38	0,53	3,92	0,392
0,4	0,48	4,77	0,444

Построим график



Из графика определим угловой коэффициент наклона прямой. Значение коэффициента численно равно ускорению свободного падения g = 10,3 м/с^2.

Критерии оценивания.

Записан второй закон Ньютона для бруска в векторном виде	1 балл
Записан второй закон Ньютона в проекциях по координатным осям	1 балл
Получена связь коэффициента трения с критическим углом	1 балл
Вычислено значение коэффициента трения	1 балл
Выведена связь ускорения с углом наклона плоскости	1 балл
Выведена связь ускорения с временем движения	1 балл
Построен линейный график или выполнен расчет g для каждого опыта	3 балла
Получено значение для ускорения свободного падения	1 балл

Задача №3. (10 баллов)

Кубик льда массой $m_л$ = 11 г, находящийся при температуре t = −10 °C, положили в цилиндрический сосуд с площадью основания S = 11 см^2. Кубику сообщают количество теплоты. Определить минимальное количество теплоты, которое необходимо сообщить кубику, чтобы при дальнейшем его нагревании уровень воды в сосуде не изменялся. Считать, что при плавлении лёд сохраняет свою форму. Удельная теплоёмкость льда c = 2100 Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда λ = 330000 Дж/кг, плотность льда ρ = 900 кг/м^3.

Возможное решение.

По мере таяния льда уровень воды в сосуде будет подниматься до тех пор, пока лёд не начнет всплывать. После того, пока весь лёд не растает, уровень воды будет находиться на одной и той же высоте h, которая определяется объемом воды, образовавшейся из всего растаявшего льда:

$m_в = \rho_в V = \rho_в h S$, откуда высота $h = \frac{m_в}{\rho_в S}$.

С другой стороны, лёд всплывёт, когда глубина подводной части кубика станет равной h.

Условие плавания частично растаявшего кубика:

$\rho_л a^3 g = \rho_в a^2 h g$,

откуда длина ребра частично растаявшего кубика $a = \frac{\rho_в h}{\rho_л} = \frac{m}{S\rho_л}$.

Масса начавшего плавать кубика:

$m^* = \rho_л a^3 = \frac{m^3}{\rho_л{}^2 S^3}$.

Таким образом, чтобы кубик всплыл, нужно, чтобы растаяла масса льда

$m_h = m - m^* = m - \frac{m^3}{\rho_л{}^2 S^3}$.

Для таяния этой массы льда необходимо количество теплоты

$Q = mc|t| + \lambda m_h = mc|t| + \lambda m\left(1 - \frac{m^2}{\rho_л{}^2 S^3}\right) = 3453{,}6$ Дж $\approx 3{,}5$ кДж .

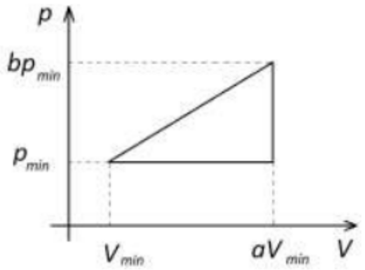
Критерии оценивания.

Указано условие, при котором не изменяется уровень воды	2
Определена высота уровня воды в сосуде	1
Записано условие плавания кубика	2
Найдена длина ребра частично растаявшего кубика	1
Определена масса растаявшего льда	2
Определено минимальное количество теплоты	2

Задача №4. (10 баллов)

Рабочим телом тепловой машины служит идеальный одноатомный газ. 1 моль этого газа совершает цикл, состоящий из процесса нагрева, в ходе которого наблюдается линейная зависимость давления от температуры, а также изохоры и изобары. Известно, что максимальный объем газа в a=1,2 раза больше минимального, максимальное давление отличается в b=2 раза от минимального, а максимальная температура на ΔT=280 К больше минимальной. Определить КПД циклического процесса.

Возможное решение.



На рисунке изображен цикл в координатах p-V, имеющий вид треугольника. Работа газа за цикл равна площади внутри треугольника:

$$A = \frac{1}{2}(p_{max} - p_{min})(V_{max} - V_{min}) = \frac{1}{2}(bp_{min} - p_{min})(aV_{min} - V_{min}) =$$

$= \frac{1}{2}(b-1)(a-1)p_{min}V_{min} = 0{,}1 p_{min}V_{min}$.

Применив уравнение Менделеева-Клайперона для двух состояний получаем:

$p_{min}V_{min} = \nu RT_{min}$

$p_{max}V_{max} = \nu RT_{max}$

$bp_{min}aV_{min} = \nu RT_{max}$

Из уравнений следует, что $T_{max} = baT_{min} = 2{,}4T_{min}$.

Получаем, что $\Delta T = T_{max} - T_{min} = 1{,}4T_{min}$, откуда $T_{min} = 200$ К .

Рассчитаем работу газа за цикл: $A = 0{,}1\nu RT_{min} = 0{,}1 \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 200 = 166{,}2$ Дж .

Теплота передается газу от нагревателя в процессе с прямой зависимостью давления от объема:

$$Q_{нагр} = \Delta U + A_{нагр} = \frac{3}{2}\nu R(T_{max} - T_{min}) + \frac{1}{2}(p_{max} + p_{min})(V_{max} - V_{min}) =$$

$$= \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \frac{1}{2}(b+1)(a-1)p_{min}V_{min} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + 0{,}3p_{min}V_{min} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + 0{,}3\nu RT_{min} =$$

$= \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 280 + 0{,}3 \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 200 = 3490{,}2 + 498{,}6 = 3988{,}8$ Дж .

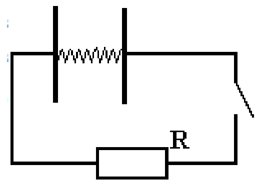
КПД цикла:
$\eta = \frac{A}{Q_{нагр}} = \frac{166,2}{3988,8} \cdot 100\% \approx 4,2\%$.

Критерии оценивания.

Построен график цикла в координатах p-V (треугольник)	1 балл
Получено выражение для работы цикла	2 балла
Получено отношение максимальной и минимальной температур из уравнения Менделеева-Клайперона	1 балл
Найдена минимальная температура	1 балл
Найдена работа за цикл	1 балл
Определен процесс, в котором газ получает теплоту	1 балл
Вычислено значение теплоты, полученное газом в циклическом процессе при нагревании	2 балла
Вычислен КПД цикла	1 балл

Задача №5. (10 баллов)

Между пластинами плоского конденсатора находится пружина, соединенная с пластинами жесткостью k, изготовленная из изолятора. Площадь пластин S, масса m. В недеформированном состоянии длина пружины L. Конденсатор зарядили до заряда q. Затем его разряжают через резистор сопротивлением R, замыкая ключ. Какая теплота выделится на резисторе, если разряд конденсатора происходит медленно?



Возможное решение.

Когда сообщили заряд конденсатору, пружина между пластин сжалась. Обозначим x – деформацию пружины. Пластина конденсатора находится в равновесии под действием кулоновской силы притяжения к другой пластине и силы отталкивания пружины:

$$kx = Eq,$$

где E – напряженность поля одной пластины, $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, σ - поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора, $\sigma = q/S$.

Получаем: $kx = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0} = \frac{qq}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$.

Откуда деформация пружины в положении равновесия $x = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 kS}$.

Расстояние между пластинами $d = L - x$.

Энергия, первоначально запасённая в конденсаторе:

$W_к = \frac{q^2}{2C}$.

Ёмкость плоского конденсатора:

$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{L-x}$.

Получаем: $W_к = \frac{q^2(L-x)}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 q^2}{2\varepsilon_0 kS \cdot 2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^4}{4{\varepsilon_0}^2 kS^2}$.

Энергия, запасённая в пружине:

$W_{пр} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kq^4}{2\cdot 4{\varepsilon_0}^2 k^2 S^2} = \frac{kq^4}{8{\varepsilon_0}^2 k^2 S^2}$.

При медленном разряде механические колебания в пружине не возбуждаются, поэтому на резисторе выделится как энергия, запасённая в конденсаторе, так и энергия пружины:

$W = W_к + W_{пр} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^4}{4{\varepsilon_0}^2 kS^2} + \frac{kq^4}{8{\varepsilon_0}^2 k^2 S^2} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^4}{8{\varepsilon_0}^2 kS^2}$.

Критерии оценивания.

Определено условие равновесия для пластины конденсатора	2 балла

Выражена деформация пружины в положении равновесия	1 балл
Записана ёмкость плоского конденсатора	1 балл
Получено выражение энергии, запасенной в конденсаторе с учетом его ёмкости	2 балла
Получено выражение энергии пружины с учетом ее деформации	2 балла
Выражена энергия, выделяемая на резисторе	2 балла