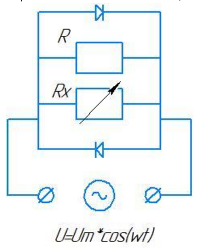
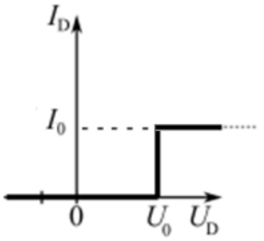
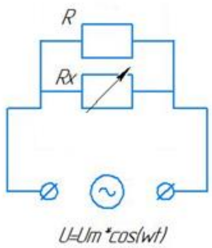
1. "Элемент Х"
   Дана схема, показанная на рисунке.
   

   Найти зависимость тока от времени в цепи, если сопротивление элемента Х зависит от тока так: $R_x = \alpha {I_x}^2$, а ВАХ диода показана на рисунке. Напряжение на концах цепи меняется по гармоническому закону, а $U_m = U_0$, $I_0 = \sqrt[3]{\frac{U_0}{\alpha}}$.

Возможное решение:

1. Диод закрыт, когда напряжение на участке меньше напряжения открытия диода, эквивалентная схема выглядит тогда так:
   

2. Общий ток будет складываться из тока по элементу Х и резистору R.
   $I_0 = I_R + I_x = \frac{U}{R} + \frac{U}{R_x}$, $I_x = \frac{U}{R_x} = \frac{U}{\alpha {I_x}^2} => I_x = \sqrt[3]{\frac{U}{\alpha}} => I_0 = \frac{U_m \cos(wt)}{R} + \sqrt[3]{\frac{U_m \cos(wt)}{\alpha}}$.
3. Один из диодов открывается только тогда, когда $\cos(wt) = \pm 1$, т.е. $wt = \pi k$, где k- целое число.
4. Когда $U = U_0$, открыт один диод (вне зависимости от направления тока), второй закрыт, напряжение на элементе Х равно U_0 и ток через него равен $I_x = \sqrt[3]{\frac{U_0}{\alpha}}$, тогда общий ток будет равен $2\sqrt[3]{\frac{U_0}{\alpha}} + \frac{U_0}{R}$.
5. Итог: для любого $t \neq \frac{\pi k}{w}$, где k- целое число, $I_0 = \frac{U_m \cos(wt)}{R} + \sqrt[3]{\frac{U_m \cos(wt)}{\alpha}}$, для $t = \frac{\pi k}{w}$, где k- целое число, $I_0 = 2\sqrt[3]{\frac{U_0}{\alpha}} + \frac{U_0}{R}$.

Система оценивания задачи:

Показана эквивалентная схема, когда оба диода закрыты – **2 балла**

Найден ток через элемент Х при закрытом диоде – **1 балл**

Найден общий ток для случая, когда диоды закрыты – **2 балла**

Указано, когда открывается диод и что открытым может быть всегда только 1 диод – **1 балл**

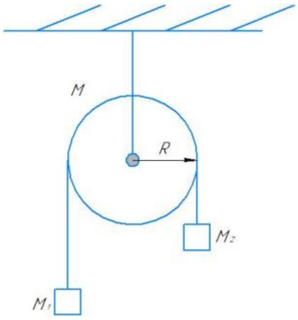
Указано, что при открытом диоде ток будет идти и через элемент Х и через резистор R – **2 балла**

Найден ток через элемент Х при открытом диоде – **1 балл**

Найден общий ток при открытом диоде – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Грузы и блок»
   Грузы m_1 и m_2 удерживаются на весомом блоке массой M, радиуса R. Систему отпускают, и она приходит в движение. С какой скоростью будут двигаться все тела, когда груз 1 сместится на h относительно начального положения? Чему равна сила давления нити на блок? Известно, что ускорения, с которыми двигались грузы, постоянны. Нить невесома и нерастяжима. Проскальзывания нет.



Возможное решение:

1. Проскальзывания нет, следовательно, скорости движения нити, грузов и обода блока в каждый момент времени равны друг другу. Для определённости положим, что $m_1 > m_2$.
2. Тогда по теореме об изменении кинетической энергии для системы «грузы-нить-блок» работа внешних сил идёт на изменение кинетической энергии тел системы: $(m_1 - m_2)gh = \frac{m_1v^2}{2} + \frac{m_2v^2}{2} + \frac{MR^2w^2}{2}, w = \frac{v}{R} => v = \sqrt{\frac{2(m_1-m_1)gh}{m_1+m_2+M}}$ (правильнее будет рассмотреть теорему об изменении кинетической энергии отдельно для груза 1, груза 2 и блока, а потом сложить результат, но получится то же самое).
3. Сила давления нитей на блок будет равна сумме сил натяжения нитей справа и слева, так как блок поступательно не движется: $F = T_1 + T_2$
4. Из второго закона Ньютона для грузов $T_1 = m_1(g - a)$, $T_2 = m_2(g + a)$, где a – модуль ускорения грузов и точек обода блока.
5. Так как ускорения, с которыми двигались грузы, постоянны, то вес нити с грузами не будет меняться. При этом угловое ускорение блока из основного уравнения динамики вращательного движения получится равным $\beta = \frac{(m_1-m_2)gR}{(MR^2+m_1R^2+m_2R^2)}$, при этом $\beta = \frac{a}{R}$, так как нет проскальзывания.
6. В итоге, $F = m_1(g - a) + m_2(g + a) = (m_1 + m_2)g - \frac{(m_1-m_2)^2g}{(M+m_1+m_2)}$.

Система оценивания задачи:

Указано, что линейная скорость обода блока равна линейной скорости грузов в каждый момент времени – **1 балл**

Указано, что линейное ускорение обода блока равно ускорению грузов в каждый момент времени – **1 балл**

Найдена угловая скорость блока и линейная скорость грузов после смещения – **3 балла**

Найдено угловое ускорение блока – **2 балла**

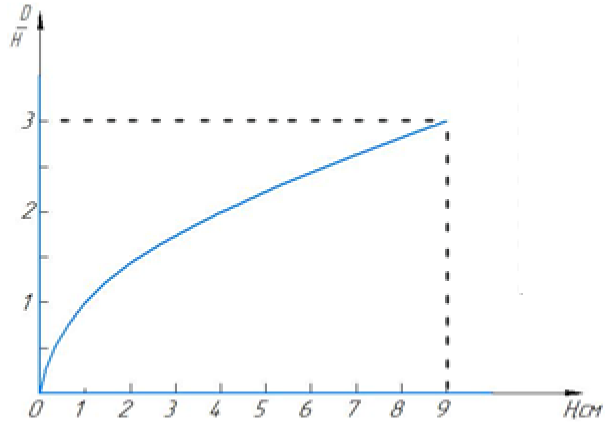
Выражены силы натяжения T_1 и T_2 – **1 балл**

Найдена сила давления нити на блок – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Песочные часы»

   Коля наблюдал за тем, как высыпается песок из одной части песочных часов в другую. Он заметил, что песок в нижней колбе образует конус высотой H и диаметром основания D, и решил исследовать изменение высоты и диаметра основания конуса, измеряя их линейкой. Из курса физики Коля знает, что $D = aH^n$, где n – вещественное число, a – некоторый коэффициент. Затем Коля взял двое таких часов – одни рассчитаны на 16 часов, другие на 1 час – и одновременно перевернул. Определите время, через которое высота конусов в нижних колбах часов будет отличаться на 1 см. Плотность песка равна $\rho = 1900\,\frac{кг}{м^3}$, масса песка в нижней колбе часов, рассчитанных на 16 часов, изменяется со скоростью $\mu_1 = 0{,}002\,\frac{кг}{мин}$. График зависимости $\frac{D}{H}$ от H, полученный Колей, показан на рисунке. Объём конуса рассчитывается по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$, где h – высота конуса, а S – площадь основания. Общая масса песка в обоих часах одинакова.



Возможное решение:

1. Масса песка в нижней колбе равна, с одной стороны, $m_1 = \mu_1 t$, а с другой $m_1 = \frac{1}{3}\rho\frac{\pi d^2}{4}H$
2. Из графика видно, что в зависимости $D = aH^n$, $a = 1\,\frac{1}{см}$, а $n = \frac{3}{2}$.
3. Тогда высота первого конуса от времени будет зависеть так $H_1(t) = \sqrt[4]{\frac{\mu_1 t}{\frac{\pi}{12}\rho\alpha}}$.
4. Аналогично для второго конуса, только $\mu_2 = 16\mu_1$, так как за меньшее в 16 раз время во вторых часах уйдёт в нижнюю часть та же масса, следовательно, $H_2(t) = \sqrt[4]{16\frac{\mu_1 t}{\frac{\pi}{12}\rho\alpha}} = 2H_1(t)$.
5. Пусть $\frac{\mu_1}{\frac{\pi}{12}\rho\alpha} = \beta \approx 1\,\frac{см^4}{мин}$.
6. Тогда $\Delta H(t) = H_2(t) - H_1(t) = H_1(t) = \sqrt[4]{\frac{\mu_1 t}{\frac{\pi}{12}\rho\alpha}} \Rightarrow t = \frac{(\Delta H)^4}{\beta}$ =1 мин.

Система оценивания задачи:

Найдена зависимость диаметра основания конуса от его высоты – **3 балла**

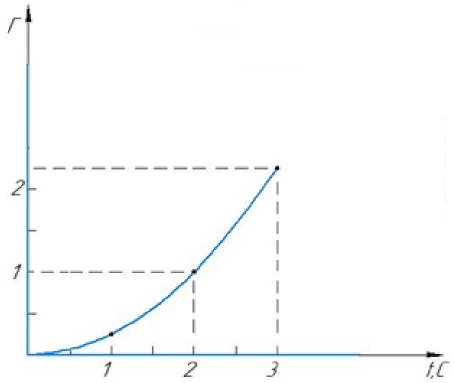
Найдена зависимость высоты от времени – **3 балла**

Найдена скорость увеличения массы конуса во вторых часах – **2 балла**

Найдено время, через которое высота конусов будет отличаться на 1 см – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Задание на пятёрку»
   Одиннадцатиклассник Евгений не совсем верно понял цель школьной лабораторной работы по измерению линейного увеличения линзы. Вместо того, чтобы просто поставить между предметом и экраном линзу, добиться чёткого изображения на экране и измерить линейное увеличение, Евгений перемещал предмет и экран вдоль реек так, что получил (после обработки данных и аппроксимации их на компьютере) следующий график зависимости линейного увеличения линзы от времени.
   Чтобы получить пятёрку, Евгений попросил дополнительное задание.
   Помогите Евгению найти зависимость скорости перемещения предмета от времени, если известно, что в момент времени 2 с предмет находился от экрана на расстоянии 30 см.



Возможное решение:

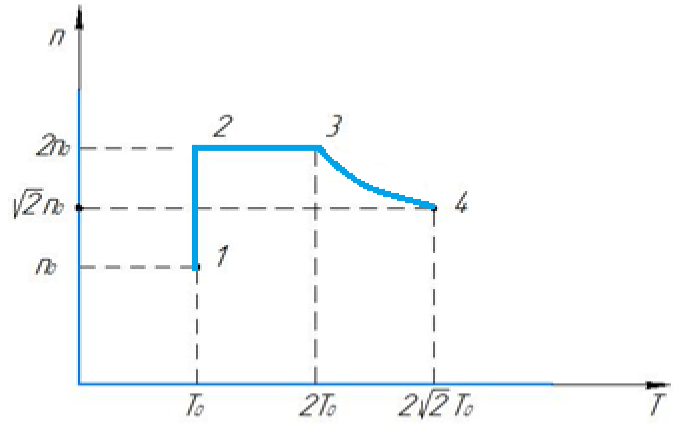
1. По определению линейного увеличения оно равно $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}$ а для тонкой линзы также верно, что $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, где f- расстояние от изображения до линзы, а d – расстояние от предмета до линзы.
2. Судя по графику, линза собирающая (так как есть участок, где увеличение больше единицы), а предмет из «бесконечности» перемещали по направлению к линзе. Линза была неподвижна, так как перемещались только предмет и экран.
3. Найдём зависимость расстояние от предмета до линзы от времени из формулы тонкой линзы:
$$f = \frac{Fd}{d - F} => \Gamma = \frac{F}{d - F} => d = \frac{F(1 + \Gamma)}{\Gamma}$$
4. Из графика можно получить, что $\Gamma = \alpha t^2$, где $\alpha = 0{,}25$ с^2=> $d(t) = \frac{F}{\alpha t^2} + F$.
5. По условию при $\Gamma = 1$ расстояние от предмета до линзы было равно $d = 30$ см, такое линейное увеличение может быть только на расстоянии $d = 2F$=> $F = 15$см.
6. Скорость тела от времени u(t) можно получить, взяв производную от зависимости $d(t) => u(t) = -2\frac{F}{\alpha t^3} = -\frac{0{,}3}{0{,}25t^3}$

Система оценивания задачи:

Написана формула тонкой линзы – **1 балл**
Написано определение линейного увеличения линзы из пункта 1 – **1 балл**
Через фокусное расстояние и линейное увеличение выражено расстояние от предмета до изображения (как в пункте 3) – **1 балл**
Найдена зависимость линейного увеличения от времени из графика – **2 балла**
Найдено фокусное расстояние линзы – **1 балл**

Найдена итоговая зависимость расстояние от предмета до линзы – **1 балл**
Показано, что скорость предмета – производная от расстояния от предмета до линзы по времени – **1 балл**
Найдена зависимость скорости предмета от времени – **2 балла**
Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «Максимальная работа»
   Зависимость концентрации 1 моля идеального газа от температуры указана на рисунке. На каком из участков совершённая газом работа максимальна?



Возможное решение:

1. Прежде всего, требуется определиться с тем, какие процессы происходят на участках 1-2, 2-3, 3-4. По условию задачи масса и хим. состав не изменяется.
2. На участке 1-2 температура постоянна => процесс изотермический; на участке 2-3 концентрация постоянна, $p = nKT; pV = \nu RT$=> $\frac{p}{T} = const => V = const$ =>процесс изохорический; на участке 3-4 $nT = const => p = const$=> процесс изобарический.
3. Элементарная работа $dA = pdV$, работа газа общая на участке равна $A = \int dA$ => на участке 2-3 работа газа равна нулю; на участке 1-2 $A_{12} = -\nu RT_0 ln\frac{p_1}{p_2} = -\nu RT_0 ln2$ (над газом совершают работу по сжатию газа); на участке 3-4 $A_{34} = p_3(V_4 - V_3)$.
4. Используя уравнение Клапейрона-Менделеева, найдём значения давлений и объёмов в точках 1,2,3,4 через концентрацию и температуру и подставим в выражение для работы из пункта 3.
5. $A_{34} = p_3(V_4 - V_3) = \frac{4n_0kT_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\nu R}{n_0k} = 2\nu RT_0(\sqrt{3} - 1)$.
6. Отсюда получается, что на участке 3-4 работа максимальна.

Система оценивания задачи:

Определены процессы на каждом участке графика – **3 балла**
Посчитана работа на участке 1-2 – **2 балла**
Посчитана работа на участке 2-3 – **2 балла**
Найдены макропараметры (давление, температура, объём) в точках 1,2,3,4 – **1 балл**
Посчитана работа на участке 3-4 – **2 балла**
Максимальный балл за полное решение – 10 баллов