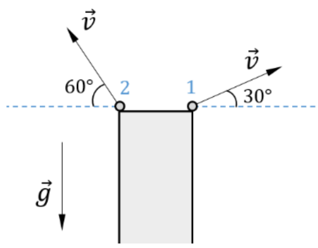
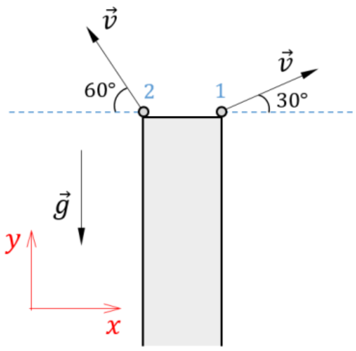
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ
Муниципальный этап
Решения и критерии
11 класс

1. 60 и 30. С высокой башни одновременно бросают два камня с одинаковой по модулю начальной скоростью v под углами 30° и 60° к горизонту (см. рисунок). Через какое время τ_1 скорость первого шарика станет горизонтально направленной? Через какое время τ скорости камней снова будут перпендикулярны друг другу? Траектории камней лежат в одной плоскости. Ускорение свободного падения g. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



Возможное решение



Введём координатные оси x и y как это представлено на рисунке. В отсутствии сил сопротивления воздуха движение камней является равноускоренным и происходит с ускорением свободного падения. С учётом этого для проекций скоростей камней на оси получаем:

$$\begin{cases} v_{1x} = v\cos 30^o; & (1) \\ v_{2x} = -v\cos 60^o; & (2) \\ v_{1y} = v\sin 30^o - gt; & (3) \\ v_{2y} = v\sin 60^o - gt. & (4) \end{cases}$$

При $t = \tau_1$ скорость первого шарика горизонтально направлена, значит $v_{y1} = 0$. Или $0 = v\sin 30^o - g\tau_1$, откуда $\tau_1 = \frac{v\sin 30^o}{g} = \frac{v}{2g}$.

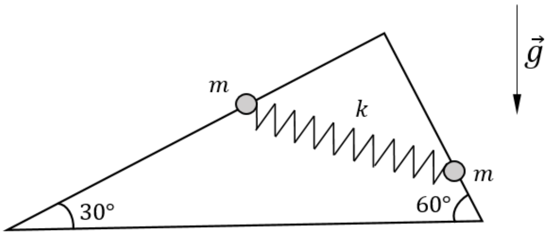
При $t = \tau$ скорости шариков снова будут перпендикулярны друг другу. Запишем условие перпендикулярности: $\frac{v_{1x}}{v_{1y}} = -\frac{v_{2y}}{v_{2x}}$ (или $v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} = 0$). С учётом (1) – (4) получаем уравнение $v\cos 30^o(-v\cos 60^o) + (v\sin 30^o - g\tau)(v\sin 60^o - g\tau) = 0$, решая которое находим $\tau = \frac{(\sqrt{3}+1)v}{2g}$ (корень $\tau = 0$ не подходит).

Ответ: $\tau_1 = \frac{v}{2g}$; $\tau = \frac{(\sqrt{3}+1)v}{2g}$.

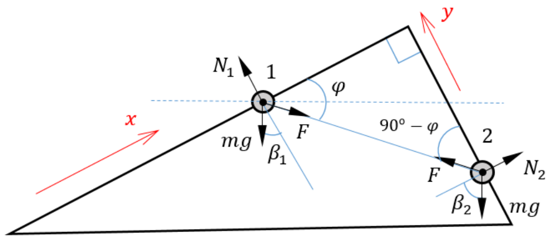
Возможные критерии оценивания

№	Критерий	Количество баллов
1.	Получены соотношения (1) и (2)	1
2.	Получено соотношение (3)	1
3.	Получено соотношение (4)	1
4.	Указано, что $v_{y1} = 0$ при $t = \tau_1$	1
5.	Получен ответ $\tau_1 = \frac{v}{2g}$	1
6.	Записано условие перпендикулярности векторов	2
7.	Из условия перпендикулярности получено квадратное относительно τ уравнение	1
8.	Получен ответ $\tau = \frac{(\sqrt{3}+1)v}{2g}$	2
	Итого максимально за задачу	10

2. 30 и 60. Из проволоки изготовили рамку в форме прямоугольного треугольника (с углами при вершинах 30° и 60°) и закрепили её в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке. Гипотенуза треугольника горизонтальна. По проволоке могут скользить без трения небольшие бусинки одинаковой массы m. Бусинки соединены невесомой пружиной жёсткости k. Длина пружины в недеформированном состоянии l_0. Ускорение свободного падения g. Известно, что в положении равновесия бусинки располагаются на катетах треугольника. Найдите расстояние l между бусинками и угол α между пружинкой и горизонталью в этом положении.



Возможное решение



Расставим силы, действующие на бусинки 1 и 2 (см. рисунок). F – модуль силы упругости пружины, N_1 и N_2 – силы нормальных реакции, действующие на бусинки 1 и 2 соответственно.

По теореме об углах со взаимно перпендикулярными сторонами $\beta_1 = 30^o, \beta_2 = 60^o$.

Из условия равновесия бусинки 1 в проекции на ось x и бусинки 2 в проекции на ось y:

$$\begin{cases} mg\sin\beta_1 = F\cos\varphi; & (1) \\ mg\sin\beta_2 = F\sin\varphi. & (2) \end{cases}$$

Из (1) и (2) получаем $\mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3}$, а $\varphi = 60^o$. Значит угол между пружинкой и горизонталью в положении равновесия будет равен $\alpha = \varphi - 30^o = 30^o$.

Также из (1) и (2) найдем $F = mg$.

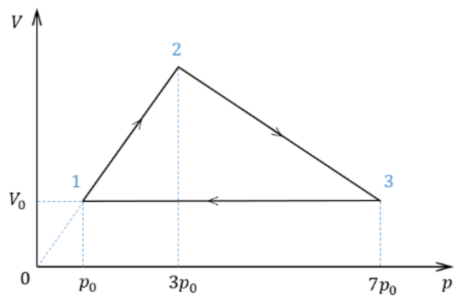
Запишем закон Гука для деформированной пружины в состоянии равновесия $F = k(l - l_0)$, откуда $l = l_0 + \frac{F}{k} = l_0 + \frac{mg}{k}$.

Ответ: $\alpha = 30^o$; $l = l_0 + \frac{mg}{k}$.

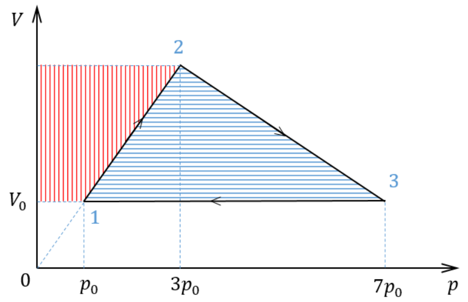
Возможные критерии оценивания

№	Критерий	Количество баллов
1.	Определены углы $\beta_1 = 30^o, \beta_2 = 60^o$.	1
2.	Записано условие равновесия для бусинки 1	2
3.	Записано условие равновесия для бусинки 2	2
4.	Найден угол $\varphi = 60^o$	1
5.	Найден модуль силы упругости $F = mg$	1
6.	Получен ответ $\alpha = 30^o$	1
7.	Записан закон Гука $F = k(l - l_0)$	1
8.	Получен ответ $l = l_0 + \frac{mg}{k}$	1
	Итого максимально за задачу	10

3. Фольклор. С одним моль идеального одноатомного газа совершают циклический процесс 1-2-3-1, показанный на VP-диаграмме (в процессах 1-2 и 2-3 давление газа линейно зависит от объёма, причём продолжение графика процесса 1-2 проходит через начало координат; процесс 3-1 – изохорический). Известно, что температура в точке 1 равна $T_0 = 200$ К. Найдите температуру T_2 газа в точке 2. Какое количество теплоты Q_{12} подвели к газу в процессе 1-2? Определите работу A газа за цикл. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).



Возможное решение



Введем обозначение $\nu = 1$ моль – количество вещества. Так как в процессе 1-2 давление газа линейно зависит от объёма и увеличивается в три раза, то объём в состоянии 2: $V_2 = 3V_0$.

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для точек 1 и 2 соответственно:

$$\begin{cases} p_0 V_0 = \nu R T_0; & (1) \\ 3p_0 3V_0 = \nu R T_2. & (2) \end{cases}$$

Из (1) – (2) получаем $T_2 = 9T_0 = 1800$ К.

Работу A_{12}, совершенную газом на участке 1-2, определим через площадь трапеции на графике $V(p)$ (заштрихована красным): $A_{12} = \frac{1}{2}(p_0 + 3p_0)(3V_0 - V_0) = 4p_0V_0 = 4\nu RT_0$.

Изменение внутренней энергии на участке 1-2: $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 12\nu RT_0$.

Согласно первому началу термодинамики $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 16\nu RT_0 \approx 26{,}6$ кДж.

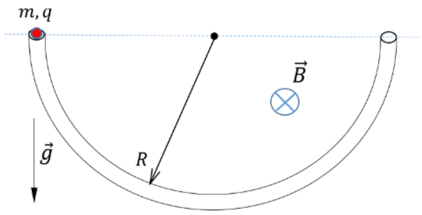
С учётом того, что работа A газа за цикл отрицательна и определяется через площадь треугольника (заштрихован синим), ограниченного графиком кругового процесса, получаем: $A = -\frac{1}{2}(7p_0 - p_0)(3V_0 - V_0) = -6\nu RT_0 \approx -9{,}97$ кДж.

Ответ: $T_2 = 9T_0 = 1800$ К; $Q_{12} = 16\nu RT_0 \approx 26{,}6$ кДж; $A = -6\nu RT_0 \approx -9{,}97$ кДж.

Возможные критерии оценивания

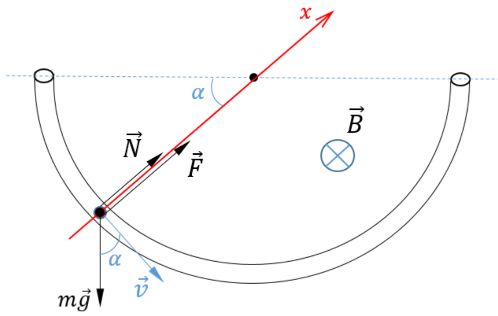
№	Критерий	Количество баллов
1.	Получен ответ $T_2 = 9T_0 = 1800$ К	2
2.	Записано выражение для работы на участке 1-2: $A_{12} = 4\nu RT_0$	2
3.	Записано выражение для изменения внутренней энергии $\Delta U_{12} = 12\nu RT_0$	1
4.	Записано первое начало термодинамики $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$	1
5.	Получен буквенный ответ $Q_{12} = 16\nu RT_0$	1
6.	Получен численный ответ $Q_{12} \approx 26{,}6$ кДж	0,5
7.	Идея определения работы через площадь треугольника	1
8.	Получен буквенный ответ $A = -6\nu RT_0$	1
9.	Получен численный ответ $A \approx -9{,}97$ кДж	0,5
	Итого максимально за задачу	10

4. По трубе. Непроводящая незаряженная тонкая трубка согнута в виде полуокружности радиуса R, расположена в вертикальной плоскости, и находится в однородном постоянном во времени магнитном поле с индукцией B (см. рисунок). Линии индукции горизонтальны и перпендикулярны плоскости полуокружности. Оба конца трубы находятся на одной горизонтали. Внутрь трубки вблизи края с одной стороны отпускают с нулевой начальной скоростью небольшой диэлектрический шарик массой m с зарядом q (q>0). Определите максимальную скорость v_{max} шарика и максимальную силу N_{max} взаимодействия шарика и трубки в процессе дальнейшего движения. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g. Известно, что $\frac{qB}{3m} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$. При движении шарика внутри трубки электрический заряд шарика остаётся неизменным.



Возможное решение

Расставим силы, действующие на шарик в произвольный момент времени. Введем ось x, проходящую через шарик и центр окружности радиуса R. N – сила нормальной реакции (предположим, что она направлена к центру окружности). Магнитная составляющая силы Лоренца $F = qvB\sin90^{\circ} = qvB$ направлена к центру окружности (по правилу левой руки с учётом $q > 0$). α – угол между осью x и горизонталью в произвольный момент времени.



Запишем II закон Ньютона в проекции на ось x: $ma_x = N_x + F - mg\sin\alpha$, где $a_x = \frac{v^2}{R}$.

При движении шарика в трубке магнитная составляющая силы Лоренца и сила нормальной реакции на шарик со стороны трубки работы не совершают, значит полная механическая энергия шарика сохраняется.

Из закона сохранения энергии: $mgR\sin\alpha = \frac{mv^2}{2}$. Значит максимальная скорость в процессе дальнейшего движения достигается в самой нижней точке трубки и равна $v_{max} = \sqrt{2gR}$.

С учётом II закона Ньютона и закона сохранения энергии получаем зависимость силы нормальной реакции в проекции на ось x от скорости v шарика: $N_x = \frac{3mv^2}{2R} - qvB$. (1)
Зависимость (1) является квадратичной, графиком этой зависимости является парабола.

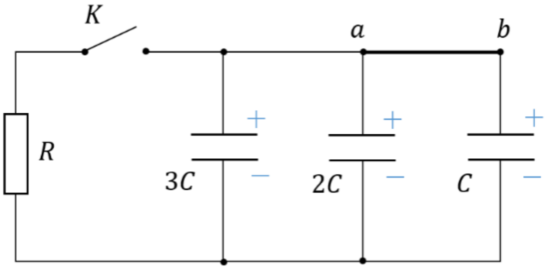
Заметим, что $N_x = 0$ при $v = 0$ и, с учётом соотношения $\frac{qB}{3m} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$, при $v = v_{max}$. А при значениях $v \in (0; v_{max})$ сила реакции $N_x < 0$. Найдем максимальное значение модуля силы реакции через координаты вершины параболы $\left(\frac{qBR}{3m}; -\frac{q^2B^2R}{6m}\right)$, значит $N_{max} = \frac{q^2B^2R}{6m}$.

Ответ: $v_{\max} = \sqrt{2gR}$; $N_{max} = \frac{q^2B^2R}{6m}$.

Возможные критерии оценивания

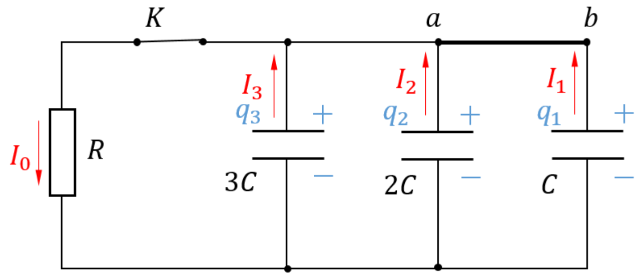
№	Критерий	Количество баллов
1.	Записано выражение для силы Лоренца $F = qvB\sin 90^{o} = qvB$	0,5
2.	Верно указано направление силы Лоренца	0,5
3.	Записан II закон Ньютона $ma_x = N_x + F - mg\sin\alpha$	1,5
4.	Учтено, что $a_x = \frac{v^2}{R}$	0,5
5.	Указано, что работа силы Лоренца равна нулю	1
6.	Указано, что работа силы нормальной реакции равна нулю	0,5
7.	Записан закон сохранения энергии $mgR\sin\alpha = \frac{mv^2}{2}$	1,5
8.	Определена максимальная скорость $v_{max} = \sqrt{2gR}$	1
9.	Получено соотношение (1): $N_x = \frac{3mv^2}{2R} - qvB$	1
10.	Обосновано, что максимальному значению N_{max} соответствует вершина параболы	1
11.	Получен ответ $N_{max} = \frac{q^2B^2R}{6m}$	1
	Итого максимально за задачу	10

5. Разрядка. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, ключ K разомкнут, а конденсаторы заряжены до некоторого неизвестного напряжения. Найдите силу тока I_0 через резистор сопротивлением R в некоторый момент времени после замыкания ключа, если известно, что через перемычку ab в этот момент времени сила тока равна I_1. Чему равен заряд q_1 конденсатора ёмкости C в этот момент? Ёмкости конденсаторов C, $2C$ и $3C$ известны. Сопротивление перемычки и соединительных проводов пренебрежимо мало.



Возможное решение

Рассмотрим цепь в указанный момент времени (см. рисунок). Пусть I_2 и I_3 – силы токов, текущие от конденсаторов, а q_1, q_2 и q_3 – заряды конденсаторов.



Так как конденсаторы соединены параллельно, то напряжения на них в любой момент времени одинаковы, значит: $\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{2C} = \frac{q_3}{3C}$.

Аналогичным соотношением будут связаны и изменения зарядов, произошедшие за некоторый малый промежуток времени Δt: : $\frac{\Delta q_1}{C} = \frac{\Delta q_2}{2C} = \frac{\Delta q_3}{3C}$. После деления последнего уравнения на время Δt приходим к соотношению для токов: $I_1 = \frac{I_2}{2} = \frac{I_3}{3}$.

С учётом первого правила Кирхгофа $I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + 2I_1 + 3I_1 = 6I_1$.

Напряжение на резисторе равно напряжению на первом конденсаторе: $\frac{q_1}{C} = I_0 R$. Значит $q_1 = CI_0R = 6CI_1R$.

Ответ: $I_0 = 6I_1$; $q_1 = 6CI_1R$.

Возможные критерии оценивания

№	Критерий	Количество баллов
1.	Отмечено равенство напряжений на конденсаторах и резисторе	1
2.	Использовано первое правило Кирхгофа	1
3.	Записано соотношение $\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{2C} = \frac{q_3}{3C}$	1
4.	Получено соотношение для токов $I_1 = \frac{I_2}{2} = \frac{I_3}{3}$	2
5.	Получен ответ $I_0 = 6I_1$	2
6.	Записано соотношение $\frac{q_1}{C} = I_0R$	1
7.	Получен ответ $q_1 = 6CI_1R$	2
	Итого максимально за задачу	10