

11 класс

Задача 11.1. Космическая одиссея.

Как-то раз Крош оказался в ракете, построенной Пином (рис. 11.1). Заметив, что ракета взлетает, Крош стал, чтобы привлечь внимание, с интервалом $\tau = 1$ с выбрасывать в иллюминатор разные предметы, которые смог найти внутри. На каком расстоянии друг от друга эти предметы будут падать на землю, если начальная скорость всех предметов **относительно ракеты** равна $v = 12$ м/с и направлена горизонтально. Ракета взлетает с постоянным ускорением $a = 6$ м/с². Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха не учитывать, а поверхность земли считать горизонтальной.



Рис. 11.1.

Ответ: 19 м.

Решение: Пусть ракета к моменту, когда Крош выкинул первый предмет, взлетала в течение времени T . Высота, на которую она поднялась, $H = aT^2/2$, а её скорость $u = aT$. Тело, выброшенное Крошем, относительно земли имеет скорость, горизонтальная проекция которой равна v , а вертикальная — u . Если t — время падения, то

$$0 = H + ut - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \frac{gt^2}{2} - aTt - \frac{aT^2}{2} = 0.$$

Решая это уравнение, получим, что $t = T \cdot (a + \sqrt{a^2 + ga})/g$. Так как Крош бросает предметы с интервалом τ , время их падения отличается на

$$\Delta t = \frac{a + \sqrt{a^2 + ga}}{g} \cdot \tau. \tag{11.1.1}$$

Дальность полёта предметов определяется как $L = vt$, следовательно, они будут падать на расстоянии

$$\Delta L = v\Delta t = v\tau \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 + ga}}{g} = 12 \text{ м} \cdot \frac{6 + \sqrt{96}}{10} \approx 19 \text{ м}$$

друг от друга.

Критерии:

- 1) Записано верное выражение для высоты, с которой выброшен предмет 1 балл
- 2) Записано верное выражение для скорости ракеты в этот момент 1 балл
- 3) Найдена верная связь разницы времени полёта Δt двух соседних предметов и τ (формула 11.1.1) . . . 3 балла
- 4) Записано, что $\Delta L = v\Delta t$, или аналогичное выражение 1 балл
- 5) Найдена верная связь между ΔL и τ 2 балла
- 6) Получено верное числовое значение ΔL 2 балла

Указание проверяющим:

Если учащийся использует отличный от авторского, но корректный способ решения (например, переход в систему отсчёта ракеты), то при получении правильного выражения в п.3, баллы за пункт 1 и 2 ставить автоматически.

Задача 11.2. Толкай сильнее!

На гладкой горизонтальной поверхности находится система, состоящая из бруска массой $M = 3$ кг с прикреплённым к нему невесомым блоком и груза массой $m = 0,5$ кг, привязанного с помощью нити к стене. С каким ускорением будет двигаться брусок, если его толкать с силой $F = 13$ Н, направленной вправо (см. рис. 11.2)? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Между бруском и грузом, а также в оси блока трения нет. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

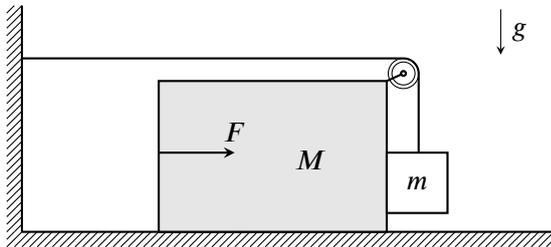


Рис. 11.2.

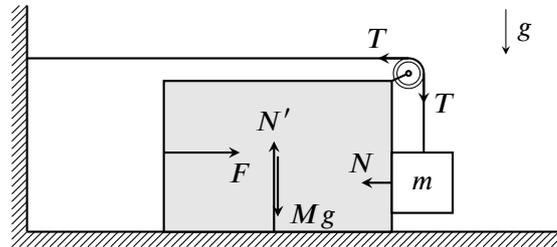


Рис. 11.3.

Ответ: 2 м/с².

Решение: Пусть a — ускорение бруска, тогда у груза ускорение имеет две составляющие, вертикальную (направленную вверх) и горизонтальную, равные по модулю a . Запишем 2й закон Ньютона для груза (N — сила взаимодействия груза и бруска, T — сила натяжения нити):

$$ma = N, \quad ma = T - mg.$$

Изобразим силы, действующие на брусок (рис. 11.3) и запишем 2й закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$Ma = F - T - N.$$

Выражая T и N из предыдущих уравнений, получим

$$Ma = F - ma - mg - ma \Rightarrow a = \frac{F - mg}{M + 2m} = \frac{13 \text{ Н} - 5 \text{ Н}}{4 \text{ кг}} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Критерии:

- 1) Указано, что горизонтальная составляющая ускорения груза равна ускорению бруска a 1 балл
- 2) Указано, что вертикальная составляющая ускорения груза равна a и направлена вверх 2 балла
- 3) Правильно записан 2й закон Ньютона для груза в проекции на вертикальную ось 1 балл
- 4) Правильно записан 2й закон Ньютона для груза в проекции на горизонтальную ось 1 балл
- 5) Правильно записан 2й закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось 3 балла
- 6) Найдено верное значение ускорения бруска a 2 балла

Указание проверяющим:

- 1) Баллы в пунктах 1 и 2 ставить за само наличие данного утверждения (например, в виде чертежа). Если из чертежа или дальнейшего текста решения учащегося не ясно, какие именно составляющие у ускорения груза, баллы не ставить.
- 2) Если в пунктах 3-5 уравнения записаны с неверно связанными между собой ускорениями, но с правильными силами, баллы за соответствующие пункты ставить.

Задача 11.3. Ток между конденсаторами.

Цепь, изображённая на рис. 11.4, состоит из двух конденсаторов с ёмкостями C и $2C$, резистора и ключа K . Вначале конденсатор ёмкостью $2C$ не заряжен, а ключ разомкнут. После того как ключ замкнули, выяснилось, что когда заряд конденсатора $2C$ равен Q , сила тока через резистор равна I_0 , а когда заряд стал равен $2Q$, сила тока через резистор упала до $I_0/3$.

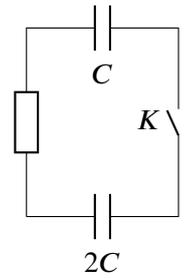


Рис. 11.4.

1. Каков был заряд конденсатора ёмкостью C до замыкания ключа?
2. Определите силу тока через резистор сразу после замыкания ключа.
3. Какие заряды установятся на конденсаторах в результате перезарядки?

Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Ответ: 1) $15Q/4$; 2) $5I_0/3$; 3) $5Q/4$ и $5Q/2$.

Решение: Пусть Q_0 — начальный заряд конденсатора C . В первом случае, когда заряд на конденсаторе $2C$ равен Q , первый конденсатор разрядился до заряда $Q_0 - Q$. Напряжение на первом конденсаторе равно сумме напряжений на втором конденсаторе и на резисторе:

$$\frac{Q_0 - Q}{C} = I_0 R + \frac{Q}{2C} \Rightarrow Q_0 = C I_0 R + \frac{3Q}{2}. \tag{11.3.1}$$

Аналогично, во втором случае

$$\frac{Q_0 - 2Q}{C} = \frac{I_0 R}{3} + \frac{2Q}{2C} \Rightarrow Q_0 = \frac{C I_0 R}{3} + 3Q. \tag{11.3.2}$$

Решая систему, получим: $C I_0 R = 9Q/4$, $Q_0 = 15Q/4$.

Сразу после замыкания ключа второй конденсатор не заряжен, поэтому

$$\frac{Q_0}{C} = I R \Rightarrow \frac{15Q}{4C} = I \cdot \frac{9Q}{4C I_0} \Rightarrow I = \frac{5I_0}{3}.$$

В установившемся режиме заряд Q_0 поделится между конденсаторами:

$$\frac{Q_0 - Q_2}{C} = \frac{Q_2}{2C} \Rightarrow Q_2 = \frac{2Q_0}{3} = \frac{5Q}{2}, \quad Q_1 = Q_0 - Q_2 = \frac{5Q}{4}.$$

Критерии:

- | | |
|---|---------|
| 1) Записано условие (11.3.1) для первого случая или его аналог | 2 балла |
| 2) Записано условие (11.3.2) для второго случая или его аналог | 2 балла |
| 3) Записано условие равенства напряжений в момент замыкания ключа $Q_0/C = I R$ | 2 балла |
| 4) Найдено выражение для начального заряда первого конденсатора $Q_0 = 15Q/4$ | 1 балл |
| 5) Найдено выражение для силы тока сразу после замыкания ключа $I = 5I_0/3$ | 1 балл |
| 6) Найдены выражения для установившихся зарядов $Q_1 = 5Q/4$ и $Q_2 = 5Q/2$ | 2 балла |

Указание проверяющим:

Если в пункте 6 по каким-то причинам одно значение найдено верно, а другое — нет, ставить 1 балл из 2.

Задача 11.4. Поршень на пружине.

В вертикальном цилиндрическом теплоизолированном сосуде находится горизонтальный поршень массой $m = 10$ кг, прикрепленный с помощью лёгкой пружины к его верхней стенке, и расположенный у нижнего основания миниатюрный нагреватель. Под поршнем находится идеальный одноатомный газ, а над поршнем — вакуум. В начальном положении поршень расположен на высоте $h = 80$ см от нижнего основания (см. рис. 11.5), пружина не деформирована. Определите жёсткость пружины k , если после передачи газу количества теплоты $Q = 130$ Дж, поршень поднялся на высоту $h/4$. Трением между поршнем и стенками пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

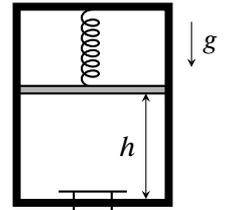


Рис. 11.5.

Ответ: 250 Н/м.

Решение: В начальном положении давление газа под поршнем равно $p_0 = mg/S$, где S — площадь поршня. Если же в результате нагревания поршень поднялся на высоту $h/4$, давление газа под ним стало $p = p_0 + kh/(4S)$, а объём газа $V = 5Sh/4$. Работа по подъёму поршня на высоту $h/4$ определяется как изменение потенциальных энергий поршня и пружины

$$A = \frac{mgh}{4} + \frac{kh^2}{32},$$

в то время как изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} (pV - p_0Sh) = \frac{3}{2} \left(\frac{p_0Sh}{4} + \frac{5kh^2}{16} \right) = \frac{3mgh}{8} + \frac{15kh^2}{32}.$$

Отсюда получим, что

$$Q = \Delta U + A = \frac{5mgh}{8} + \frac{kh^2}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{h^2} \left(Q - \frac{5mgh}{8} \right) = 250 \text{ Н/м.}$$

Критерии:

- 1) Найдена верная связь между начальным давлением газа p_0 и массой поршня 1 балл
- 2) Записано выражение для конечного давления газа $p = p_0 + kh/4S$ 1 балл
- 3) Записано верное выражение для работы газа A 2 балла
- 4) Записано верное выражение для внутренней энергии газа 2 балла
- 5) Записано верное выражение для Q через величины, данные в условии 2 балла
- 6) Найдено верное числовое значение для k 2 балла

Указание проверяющим:

- 1) В пункте 3 баллы ставятся, если учащийся привёл правильную формулу, содержащую только величины, данные в условии и найденные в процессе решения (например, p_0 или p). Абстрактные выражения, например, $A = \int pdV$, не оцениваются.
- 2) В пункте 4 баллы ставятся, если учащийся привёл правильную формулу, содержащую только величины, данные в условии и найденные в процессе решения (например, p_0 или p). Абстрактные выражения, например, $\Delta U = 3\nu R \Delta T/2$, не оцениваются.
- 3) В пункте 6 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за все предыдущие пункты отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

Задача 11.5. Разлёт шайб.

На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две одинаковые шайбы радиуса R . На них со скоростью v налетает третья шайба, имеющая радиус $r = R/3$, причём её центр движется по прямой, являющейся средним перпендикуляром отрезка, соединяющего центры покоящихся шайб (см. рис. 11.6). Найдите скорость, с которой будет двигаться третья шайба после абсолютно упругого столкновения. Все шайбы гладкие, сделаны из одинакового однородного материала и имеют одну и ту же высоту.

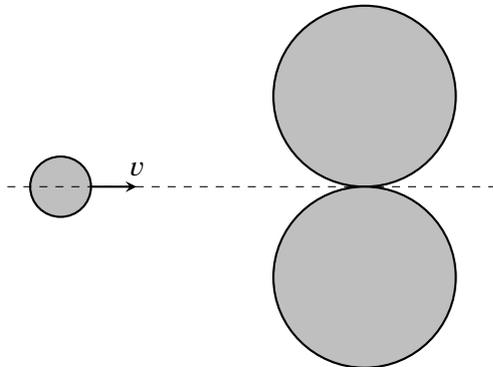


Рис. 11.6.

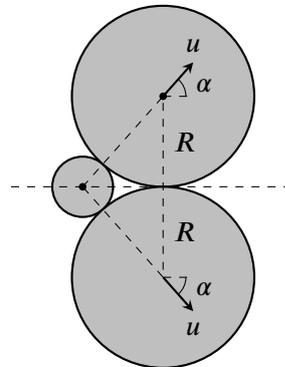


Рис. 11.7.

Ответ: $55v/71$.

Решение: Пусть v' и u — скорости маленькой и больших шайб после удара. Так как шайбы гладкие, скорость, которую приобретёт большая шайба, будет направлена по прямой, соединяющей центры маленькой и большой шайбы (рис. 11.7). Угол α между вектором \vec{u} и горизонталью (осью симметрии) определяется из условия $\sin \alpha = R/(R + R/3) = 3/4$. Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонталь, учитывая, что большая шайба в 9 раз тяжелее маленькой:

$$mv = -mv' + 2 \cdot 9mu \cos \alpha \Rightarrow v + v' = 18u \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + 2 \cdot \frac{9mu^2}{2} \Rightarrow v^2 - v'^2 = 18u^2.$$

Выражая из первого уравнения скорость u и подставляя во второе, получим

$$v^2 - v'^2 = 18 \cdot \frac{16}{7 \cdot 18^2} (v + v')^2 \Rightarrow v - v' = \frac{8}{63} \cdot (v + v') \Rightarrow v' = \frac{55v}{71} \approx 0,775v.$$

Критерии:

- 1) Указано, что скорость большой шайбы после удара направлена по линии, соединяющей центры шайб 1 балл
- 2) Правильно найден угол между скоростью u и осью симметрии 2 балла
- 3) Указано, что масса большой шайбы в 9 раз больше массы маленькой 1 балл
- 4) Правильно записан закон сохранения импульса в проекции на ось симметрии 2 балла
- 5) Правильно записан закон сохранения энергии 1 балл
- 6) Найдено верное выражение для скорости v' 3 балла

Указание проверяющим:

- 1) Балл в пункте 1 ставить за само наличие данного утверждения (например, в виде чертежа). Если из чертежа или дальнейшего текста решения учащегося не ясно, как конкретно направлен вектор скорости, балл не ставить.
- 2) В пункте 2 достаточно найти синус или иную функцию угла. Если угол найден верно, балл за предыдущий пункт должен быть также поставлен.
- 3) В пункте 4 баллы ставить за ЗСИ, записанный в проекции на ось симметрии, причём подстановка соотношения между массами и числового значения угла не обязательна. Если ЗСИ записан только в векторной форме, баллы не ставить.
- 4) В пункте 5 подстановка соотношения между массами не обязательна.
- 5) В пункте 6, если учащийся выбрал противоположное авторскому направлению скорости v' и оставил в ответе знак минус ($v' = -55v/71$), такой ответ засчитывать как верный.