

7 класс

Задача 7.1. Маша идёт в гости.

Первую часть своего пути до домика Медведя девочка Маша шла пешком. Оставшийся путь ей помогли преодолеть волки на своей машине «Скорой помощи», чья скорость была в 5 раз больше, чем скорость девочки. Зная, что на первую часть пути девочка потратила $\frac{3}{4}$ всего времени своего путешествия, а средняя скорость на всём пути до домика Медведя составила 5 м/с, определите: 1) скорость, с которой шла Маша, 2) какую часть всего пути до домика Медведя девочка шла пешком.

Ответ: 1) 2,5 м/с; 2) $\frac{3}{8}$.

Решение: Пусть v — скорость Маши, тогда скорость «Скорой» будет равна $5v$. Обозначив за t общее время путешествия Маши, получим, что полный путь, пройденный девочкой, составляет

$$s = v \cdot \frac{3t}{4} + 5v \cdot \frac{t}{4} = 2vt.$$

С другой стороны, средняя скорость Маши равна $v_{\text{ср}} = s/t$, откуда следует, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{2vt}{t} = 2v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_{\text{ср}}}{2} = 2,5 \text{ м/с.}$$

Девочка прошла пешком путь, равный

$$s_1 = v \cdot \frac{3t}{4} = \frac{3vt}{4},$$

поэтому первый участок составил $s_1/s = 3/8$ от всего пути.

Критерии:

- 1) Записана формула $s = v \cdot \frac{3t}{4} + 5v \cdot \frac{t}{4}$ или её аналог 3 балла
- 2) Найдено верное значение скорости Маши 4 балла
- 3) Найдено верное значение доли пути, которую Маша шла пешком 3 балла

Задача 7.2. За двумя зайцами.

Вернувшись с рыбалки домой, Медведь обнаружил в огороде двух зайцев, бесцеремонно собирающих урожай моркови и капусты. Увидев Медведя, зайцы одновременно бросились бежать в противоположные стороны. Первый с ведром моркови побежал со скоростью 6 м/с, а второй с мешком капусты — со скоростью 4 м/с. Подумав немного, за кем бежать, Медведь бросился вдогонку за зайцем с морковью, через 2 мин догнал его, отобрал овощи и отчитал воришку в течение 40 с, затем побежал догонять второго.

1. Через какое время **после этого** он догонит второго зайца?
 2. Сколько времени Медведь обдумывал, за кем ему побежать в первую очередь?
- Скорость Медведя во время погони всегда равна 7 м/с. Считать, что все персонажи начали бежать из одной точки и движутся вдоль одной прямой.

Ответ: 1) 520 с; 2) 20 с.

Решение: Обозначим скорости первого и второго зайцев как v_1 и v_2 , а скорость Медведя как u . Пусть t_0 — время, в течение которого Медведь обдумывал, за кем бежать. За это время первый заяц успел убежать на расстояние $v_1 t_0$. Так как Медведь догнал его за 120 с,

$$(u - v_1) \cdot 120 \text{ с} = v_1 t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{(u - v_1) \cdot 120 \text{ с}}{v_1} = \frac{(7 \text{ м/с} - 6 \text{ м/с}) \cdot 120 \text{ с}}{6 \text{ м/с}} = 20 \text{ с}.$$

В общей сложности погоня за первым зайцем и его воспитание длилось $20 \text{ с} + 120 \text{ с} + 40 \text{ с} = 180 \text{ с}$. За это время второй заяц убежал от точки старта на расстояние $v_2 \cdot 180 \text{ с} = 720 \text{ м}$. С другой стороны, сам Медведь находится от неё на расстоянии $v_1 \cdot 140 \text{ с} = 840 \text{ м}$, следовательно, между ним и вторым зайцем $720 \text{ м} + 840 \text{ м} = 1560 \text{ м}$. Отсюда найдём, что второго зайца он догонит через

$$t = \frac{1560 \text{ м}}{u - v_2} = \frac{1560 \text{ м}}{3 \text{ м/с}} = 520 \text{ с}.$$

Критерии:

- 1) Записано уравнение $(u - v_1) \cdot 120 \text{ с} = v_1 t_0$ или его аналог 2 балла
- 2) Найдено верное значение t_0 2 балла
- 3) Правильно найдено расстояние, на которое успел убежать второй заяц перед началом погони за ним 2 балла
- 4) Правильно найдено расстояние между Медведем и вторым зайцем перед началом погони 2 балла
- 5) Найдено верное значение t 2 балла

Указание проверяющим:

- 1) Формула из пункта 1 критериев может быть сразу записана внутри расчёта времени t_0 . В этом случае баллы за пункт 1 ставить.
- 2) Расчёты, необходимые для пунктов 3 и/или 4 также могут быть сделаны внутри формулы для t . Например, в пункте 4 расстояние между Медведем и зайцем может записано просто как $720 + 840$. В этом случае баллы за пункты 3 и/или 4 ставить.

Задача 7.3. Обычное дело.

Мальчик Паша поехал с родителями на дачу. Сначала дорога была свободной, и скорость движения автомобиля составила 72 км/ч. Но затем автомобиль попал в пробку и двигался со скоростью 240 м/мин втрое дольше по времени, чем занял первый участок. Оставшийся отрезок пути до дачи был посвободнее, и автомобиль смог разогнаться до скорости 15 м/с. Определите, какую часть всего пути от дома до дачи автомобиль был в пробке, если время, затраченное на поездку, оказалось в 2 раза больше, чем в случае, когда автомобиль проехал бы весь путь с первоначальной скоростью.

Ответ: 3/14.

Решение: Пусть t — время, которое бы ушло на поездку с первоначальной скоростью $v_1 = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с}$. Тогда расстояние от дома до дачи равно $s = v_1 t$. Если на первом участке пути автомобиль двигался в течение времени t_1 , в пробке он находился время $3t_1$, а на последний участок ушло $2t - 4t_1$. Расстояние от дома до дачи в этом случае будет выражаться формулой

$$s = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1),$$

где $v_2 = 4 \text{ м/с}$ и $v_3 = 15 \text{ м/с}$ — скорости в пробке и на последнем отрезке пути. Приравнивая оба выражения для s , получим, что

$$v_1 t = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1) \Rightarrow 20t = 20t_1 + 12t_1 + 30t - 60t_1 \Rightarrow 28t_1 = 10t \Rightarrow t_1 = \frac{5t}{14}.$$

Найдём теперь долю пути, которую автомобиль пробыл в пробке:

$$\frac{s_2}{s} = \frac{v_2 \cdot 3t_1}{v_1 t} = \frac{15v_2}{14v_1} = \frac{60}{14 \cdot 20} = \frac{3}{14} \approx 0,214.$$

Критерии:

- 1) Записана формула $s = v_1 t$ или её аналог 1 балл
- 2) Записано выражение для времени на третьем участке пути: $t_3 = 2t - 4t_1$ или аналогичное 1 балл
- 3) Записана формула $s = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1)$ или её аналог 3 балла
- 4) Найдена верная связь между t_1 и t 3 балла
- 5) Правильно найдена доля пути в пробке 2 балла

Указания проверяющим:

Учащийся в пунктах 1-4 может выражать все величины не через t_1 , как в авторском решении, а через, например, t_2 . Если записаны верные формулы для s , t_3 и т.д., где величины выражены через t , t_2 и скорости, баллы за соответствующие пункты ставить.

Задача 7.4. У колодца.

На дне пустого аквариума находится «колодец» — открытый сверху сосуд, стенки которого сложены из четырёх одинаковых толстых прямоугольных пластин (на рис. 7.1а изображён вид сверху). Пластины склеены между собой и с дном аквариума так, что вода сквозь швы внутрь «колодца» не протекает. В аквариум (снаружи от «колодца») со скоростью 45 мл/с начинают наливать воду. Используя график зависимости высоты уровня воды вблизи стенок аквариума от времени, приведённый на рис. 7.1б, определите: 1) площадь дна аквариума S , 2) высоту «колодца» H и длину стороны его основания L , 3) толщину стенок «колодца» a . Стенки аквариума и стенки «колодца» вертикальны.

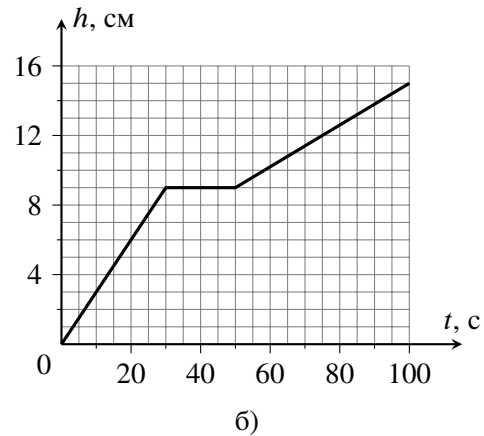
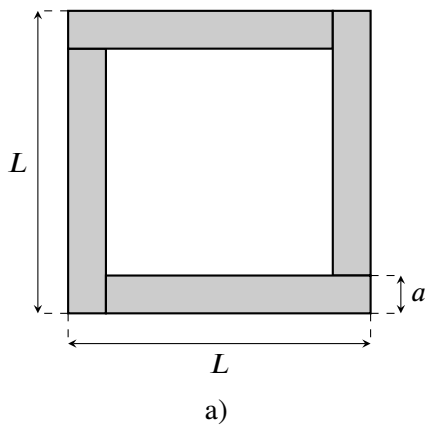


Рис. 7.1.

Ответ: 1) 375 см^2 ; 2) 9 см, 15 см; 3) 2,5 см.

Решение: Первый участок графика соответствует подъёму уровня воды снаружи от «колодца», второй участок — наполнению «колодца», а третий участок — подъёму уровня воды по всей площади сосуда. По второму (горизонтальному) участку графика определяем, что высота «колодца» $H = 9 \text{ см}$, а его внутренний объём равен $45 \text{ см}^3/\text{с} \cdot 20 \text{ с} = 900 \text{ см}^3$. Площадь дна внутри «колодца», соответственно, равна $900 \text{ см}^3/9 \text{ см} = 100 \text{ см}^2$. Так как это внутреннее пространство имеет форму квадрата, то его сторона равна 10 см. Чтобы найти площадь дна сосуда, рассмотрим третий участок графика. Там за 50 с уровень воды поднимается на 6 см, поэтому

$$S \cdot 6 \text{ см} = 45 \text{ см}^3/\text{с} \cdot 50 \text{ с} \Rightarrow S = 375 \text{ см}^2.$$

Аналогично рассмотрим первый участок графика. Там за 30 с уровень воды поднимается на 9 см, следовательно площадь дна снаружи «колодца» S_1 равна:

$$S_1 \cdot 9 \text{ см} = 45 \text{ см}^3/\text{с} \cdot 30 \text{ с} \Rightarrow S_1 = 150 \text{ см}^2.$$

Отсюда найдём, что $S - S_1 = 225 \text{ см}^2$ дна занято «колодцем», и сторона его основания равна 15 см (так как $15 \times 15 = 225$). Толщина стенок равна, соответственно,

$$a = \frac{15 \text{ см} - 10 \text{ см}}{2} = 2,5 \text{ см}.$$

Критерии:

- 1) Найдено верное значение H 1 балл
- 2) Найдено верное значение площади дна внутри «колодца» 2 балла
- 3) Найдено верное значение площади всего дна 2 балла
- 4) Найдено верное значение площади дна снаружи «колодца» 2 балла
- 5) Найдено верное значение L 1 балл
- 6) Найдено верное значение a 2 балла

Указание проверяющим:

Если в пункте 2 вместо площади внутренней части дна найдена сразу сторона квадрата (10 см), баллы за этот пункт ставить.