9 класс

Задача 9.1. Бегуны.

Крош и Бараш как-то устроили забег. Стартовав одновременно из одной точки, они побежали по лесной дорожке. Бараш, набрав некоторую скорость, удерживал её в течение всей дистанции, в то время как Крош бежал, всё время увеличивая свою скорость. Дотошный Лосяш, судивший забег, изобразил графики движения соревнующихся Смешариков (начало графика изображено на рис. 9.1).

1. Определите, через какое время после старта Крош догонит Бараша.
2. На каком расстоянии от точки старта это произойдёт?
3. На какое максимальное расстояние Бараш опережал Кроша в течение этого забега?

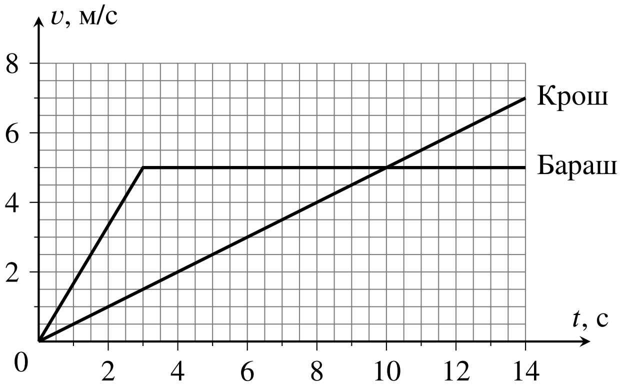

Рис. 9.1.

Ответ: 1) 18,4 с; 2) 84,3 м; 3) 17,5 м.

Решение: Крош бежал всю дорогу с постоянным укорением $a = (7\ \text{м/с})/(14\ \text{с}) = 0{,}5\ \text{м/с}^2$. Бараш первые 3 с бежал равноускоренно и пробежал расстояние $s_0 = 1/2 \cdot 5\ \text{м/с} \cdot 3\ \text{с} = 7{,}5\ \text{м}$, а дальше он двигался с постоянной скоростью $v_0 = 5\ \text{м/с}$. Так как вначале Бараш бежал быстрее Кроша, расстояние между ними увеличивалось и стало максимальным в момент, когда скорости Смешариков сравнялись (через 10 с после старта). Максимальное расстояние ΔL, на которое Бараш опережал Кроша, можно найти как площадь области, ограниченной графиками:

$$\Delta L = \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{м/с} \cdot (10\ \text{с} - 3\ \text{с}) = 17{,}5\ \text{м}.$$

Крош догонит Бараша уже после этого. Пусть это произошло в момент t, тогда

$$\frac{at^2}{2} = s_0 + v_0(t - 3\ \text{с}) \quad \Rightarrow \quad 0{,}25\ \text{м/с}^2 \cdot t^2 = 5\ \text{м/с} \cdot t - 7{,}5\ \text{м} \quad \Rightarrow \quad t^2 - 20\ \text{с} \cdot t + 30\ \text{с}^2 = 0.$$

Решая это уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получим, что

$$t = \left(10 + \sqrt{70}\right)\ \text{с} \approx 18{,}4\ \text{с}.$$

Соответственно, встреча произошла на расстоянии $L = at^2/2 = 0{,}25\ \text{м/с}^2 \cdot (18{,}4\ \text{с})^2 \approx 84{,}3\ \text{м}$.

Критерии:

1) Найдено верное значение ускорения Кроша . . . . 1 балл
2) Правильно записано уравнение, достаточное для определения времени встречи . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение времени встречи . . . . 2 балла
4) Найдено верное значение расстояния от старта до места встречи . . . . 1 балл
5) Указано, что расстояние между Смешариками будет максимальным через 10 с после старта . . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение максимального расстояния между Барашем и Крошем . . . . 2 балла

Задача 9.2. Паша экспериментирует.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша спаял схему, изображённую на рис. 9.2. К точкам C и D он подсоединил выводы мультиметра. В результате измерений Паши оказалось, что в режиме вольтметра мультиметр показывает 6 В, а в режиме амперметра — 5 мА. Чему равно сопротивление резистора R_x, если $R = 700$ Ом? Мультиметр в обоих режимах можно рассматривать как соответствующий идеальный прибор. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

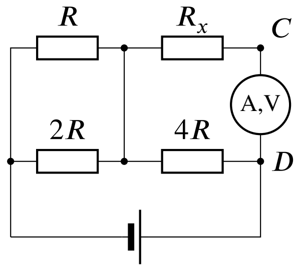

Рис. 9.2.

Ответ: 800 Ом.

Решение: Рассмотрим случай, когда мультиметр включён в режиме вольтметра. Напряжение на резисторе $4R$ равно 6 В, а общее сопротивление равно $R \cdot 2R/(R+2R)+4R = 14R/3$. Следовательно, напряжение на источнике равно

$$U_0 = \frac{6\text{ В}}{4R} \cdot \frac{14R}{3} = 7\text{ В}.$$

Во втором случае, когда мультиметр включён в режиме амперметра, сила тока через резистор R_x равна $I_0 = 5$ мА. Сила тока через резистор $4R$, соответственно, составляет $I_{4R} = I_0 R_x/(4R)$. На левой паре параллельных резисторов R и $2R$ суммарный ток $I_0 + I_{4R}$ делится в отношении $2:1$, и, например, сила тока через резистор R равна

$$I_R = \frac{2(I_0 + I_{4R})}{3} = \frac{2I_0}{3}\left(1 + \frac{R_x}{4R}\right).$$

Определим отсюда общее напряжение в цепи и приравняем его U_0:

$$U_0 = I_R R + I_0 R_x = \frac{2I_0 R}{3} + \frac{7I_0 R_x}{6} \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{6}{7I_0}\left(U_0 - \frac{2I_0 R}{3}\right) = 800\text{ Ом}.$$

Критерии:

1) Найдено верное значение напряжения источника U_0 . . . . 2 балла
2) Записано верное выражение для тока через $4R$ во втором случае . . . . 2 балла
3) Записано верное выражение для тока через какой-либо левый резистор во втором случае . . . . . . 2 балла
4) Записана верная связь между U_0, током через R_x во втором случае и сопротивлениями . . . . 2 балла
5) Получено верное значение R_x . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 1 достаточно найти, что $U_0 = 7/6 \cdot U_V$, где U_V — показание вольтметра. Балл в этом случае ставится.
2) Если учащийся смог каким-либо иным (не авторским, но корректным) способом получить верную связь из пункта 4, баллы за пункты 2 и 3 ставить автоматически.

Задача 9.3. Ох уж эти зайцы!
Девочка Маша и заяц нашли как-то на поляне бревно длиной 2 м. Положив это бревно на опору и усевшись на его противоположных концах, они стали качаться. Оказалось, что бревно находится в равновесии, когда Маша сидит на расстоянии 50 см от точки опоры. Тут из леса выбежал второй заяц, заявил, что тоже хочет качаться, и уселся на 30 см впереди первого. Чтобы восстановить равновесие бревна девочке пришлось отодвинуть точку опоры от себя на 10 см.
1. Определите массу бревна, считая его прямым и однородным.
2. На сколько сантиметров Маше придётся сдвинуть ещё раз точку опоры (относительно предыдущего случая), чтобы восстановить равновесие бревна, когда третий заяц сядет на него на 30 см впереди второго?
Масса Маши равна 39 кг, а массы всех зайцев одинаковы.

Ответ: 1) 21 кг; 2) 6,2 см.

Решение: Пусть масса бревна равна M, масса Маши — $m_{\text{М}}$, а масса одного зайца — m_0. Запишем в первом случае правило моментов относительно точки опоры, учитывая, что сила тяжести приложена к середине бревна:

$$m_0 g \cdot 150 \text{ см} + Mg \cdot 50 \text{ см} = m_{\text{М}} g \cdot 50 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad 3m_0 + M = m_{\text{М}}.$$

Во втором случае Маша сидит на расстоянии 60 см от точки опоры, первый заяц — на расстоянии 140 см, а второй — на расстоянии 110 см. Запишем ещё раз правило моментов:

$$m_0 g \cdot 140 \text{ см} + m_0 g \cdot 110 \text{ см} + Mg \cdot 40 \text{ см} = m_{\text{М}} g \cdot 60 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad 250m_0 + 40M = 60m_{\text{М}}.$$

Решая полученную систему, получим, что $M = 21$ кг, $m_0 = 6$ кг.
Пусть в третьем случае точка опоры была отодвинута на расстояние L от предыдущего положения. Тогда Маша сидит на расстоянии 60 см $+\, L$ от точки опоры, первый заяц — на расстоянии 140 см $-\, L$, второй — на расстоянии 110 см $-\, L$, а третий — на расстоянии 80 см $-\, L$. Запишем в третий раз правило моментов:

$$m_0 g \cdot (140 \text{ см} - L) + m_0 g \cdot (110 \text{ см} - L) + m_0 g \cdot (80 \text{ см} - L) + Mg \cdot (40 \text{ см} - L) = m_{\text{М}} g \cdot (60 \text{ см} + L) \quad \Rightarrow$$

$$m_0 \cdot (330 \text{ см} - 3L) + M \cdot (40 \text{ см} - L) = m_{\text{М}} \cdot (60 \text{ см} + L) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m_0 \cdot 330 \text{ см} + M \cdot 40 \text{ см} - m_{\text{М}} \cdot 60 \text{ см}}{3m_0 + M + m_{\text{М}}} \approx 6{,}2 \text{ см}.$$

Критерии:
1) Правильно записано правило моментов в первом случае . . . . 2 балла
2) Правильно записано правило моментов во втором случае . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение массы бревна . . . . 1 балл
4) Найдено верное значение массы зайца . . . . 1 балл
5) Правильно записано правило моментов в третьем случае . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение сдвига L . . . . 2 балла

Указание проверяющим:
1) Массу зайца, строго говоря, не обязательно вычислять явно. Поэтому, если пункт 6 критериев выполнен (оценён в 1 или 2 балла), то баллы за пункт 4 ставить автоматически.
2) В пункте 6 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за пункты 1-3 и 5 отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

Задача 9.4. Две ледяных вазы.

Экспериментатор Иннокентий Иванов создал в своей лаборатории две внешне совершенно одинаковые ледяные вазы. Теплоизолировав их снаружи, учёный быстро заполнил обе вазы до краёв водой при температуре 0 ℃. Какой была ёмкость и масса изготовленных Иннокентием ваз, если после установления теплового равновесия в первой вазе осталось 500 см^3 жидкой воды, а во второй — 640 см^3? Начальная температура первой вазы составляла −33 ℃, а у второй была −22 ℃. Удельная теплоёмкость льда равна 2100 Дж/(кг·℃), его удельная теплота плавления — 330 кДж/кг, а плотность — 900 кг/м^3.

Ответ: 1,8 кг, 920 см^3.

Решение: Пусть масса вазы равна M, а её ёмкость — V. Если вазу наполнить водой, то вода станет превращаться в лёд и частично выливаться наружу, так как плотность льда меньше плотности воды. Определим количество льда, образовавшегося в первой вазе:

$$\lambda m_1 = c_{\text{л}} M \cdot 33\,^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{c_{\text{л}} M \cdot 33\,^\circ\text{C}}{\lambda}.$$

С другой стороны, $m_1 = \rho_{\text{л}}(V - 500\ \text{см}^3)$. Приравнивая, получим, что

$$V - 500\ \text{см}^3 = \frac{c_{\text{л}} M \cdot 33\,^\circ\text{C}}{\lambda \rho_{\text{л}}}.$$

Во втором случае запишем аналогичное равенство:

$$V - 640\ \text{см}^3 = \frac{c_{\text{л}} M \cdot 22\,^\circ\text{C}}{\lambda \rho_{\text{л}}}. \qquad (9.4.1)$$

Вычитая найденные соотношения друг из друга, получим

$$140\ \text{см}^3 = \frac{c_{\text{л}} M \cdot 11\,^\circ\text{C}}{\lambda \rho_{\text{л}}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\lambda \rho_{\text{л}} \cdot 140\ \text{см}^3}{c_{\text{л}} \cdot 11\,^\circ\text{C}} = \frac{330000\ \text{Дж/кг} \cdot 900\ \text{кг/м}^3 \cdot 0{,}00014\ \text{м}^3}{2100\ \text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)} \cdot 11\,^\circ\text{C}} = 1{,}8\ \text{кг}.$$

Отсюда следует, что значение ёмкости V равно

$$V = 500\ \text{см}^3 + \frac{c_{\text{л}} M \cdot 33\,^\circ\text{C}}{\lambda \rho_{\text{л}}} = 500\ \text{см}^3 + 420\ \text{см}^3 = 920\ \text{см}^3.$$

Критерии:

1) Правильно записано уравнение теплового баланса в первом случае . . . . 2 балла
2) Правильно записана связь между количеством образовавшегося льда и ёмкостью в первом случае . . 1 балл
3) Правильно записано уравнение теплового баланса во втором случае . . . . 2 балла
4) Правильно записана связь между количеством образовавшегося льда и ёмкостью во втором случае . 1 балл
5) Найдено верное значение массы вазы . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение ёмкости вазы . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Связь между количеством образовавшегося льда и ёмкостью может быть записана сразу внутри соответствующего уравнения теплового баланса (например, как в (9.4.1)). Если эта связь верная, то баллы за пункты 1, 2 и/или 3, 4 ставить.

Задача 9.5. За мёдом!

Винни-Пух как-то решил сделать воздушный шар для своих полётов за мёдом. Взяв у Кристофера Робина тонкий, нерастягивающийся и непроницаемый для газов материал оболочки и баллоны с гелием для её заполнения, он приступил к работе. Методом проб и ошибок Винни-Пух выяснил, что шар, заполненный гелием, начинает его поднимать, если радиус шара больше 2 м.

1. При каком минимальном радиусе шар поднимался бы без груза?

2. Какую максимальную массу мёда (вдобавок к самому Винни-Пуху) сможет поднять шар радиусом 2,5 м?

Масса Винни-Пуха равна 25 кг, плотность воздуха — 1,28 кг/м^3, плотность гелия — 0,18 кг/м^3. Объёмами медвежонка и мёда по сравнению с объёмом шара можно пренебречь. Каждый раз оболочка шара делается заново.

Примечание: Объём шара радиуса R равен $V = 4\pi R^3/3$, площадь сферы того же радиуса — $S = 4\pi R^2$, где $\pi \approx 3{,}14$.

Ответ: 1) 64 см; 2) 28,5 кг.

Решение: Пусть μ — поверхностная плотность материала оболочки (масса единицы площади). Тогда масса оболочки равна $\mu \cdot 4\pi R^2$, а масса гелия в шаре $\rho_\text{г} \cdot 4\pi R^3/3$. Рассмотрим первый случай, когда радиус шара равен $R_1 = 2$ м, и запишем условие плавания системы «шар+Винни-Пух» ($M_\text{ВП}$ — масса Винни-Пуха):

$$\rho_\text{в} g \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} = \rho_\text{г} g \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} + \mu \cdot 4\pi R_1^2 \cdot g + M_\text{ВП} g.$$

Отсюда найдём поверхностную плотность оболочки:

$$\mu = \frac{1}{4\pi R_1^2}\left((\rho_\text{в} - \rho_\text{г}) \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} - M_\text{ВП}\right) \approx 0{,}236 \text{ кг/м}^2. \qquad (9.5.1)$$

Пусть шар без груза поднимается при минимальном радиусе, равном r. Запишем снова условие плавания

$$\rho_\text{в} g \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \rho_\text{г} g \cdot \frac{4\pi r^3}{3} + \mu \cdot 4\pi r^2 \cdot g \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3\mu}{(\rho_\text{в} - \rho_\text{г})} \approx 64 \text{ см}.$$

Рассмотрим теперь шар радиусом $R_2 = 2{,}5$ м, на котором медвежонок поднимается вместе с мёдом массой m_0:

$$\rho_\text{в} g \cdot \frac{4\pi R_2^3}{3} = \rho_\text{г} g \cdot \frac{4\pi R_2^3}{3} + \mu \cdot 4\pi R_2^2 \cdot g + (M_\text{ВП} + m_0) g.$$

Из этого уравнения найдем массу m_0:

$$m_0 = (\rho_\text{в} - \rho_\text{г}) \cdot \frac{4\pi R_2^3}{3} - \mu \cdot 4\pi R_2^2 - M_\text{ВП} \approx 28{,}5 \text{ кг}.$$

Критерии:

1) Записано вырашение для массы оболочки $\mu \cdot 4\pi R^2$ или аналог . . . . 1 балл
2) Правильно записано условие плавания в первом случае . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение/записана верная формула для μ (формула (9.5.1)) . . . . 1 балл
4) Правильно записано условие плавания во втором случае . . . . 2 балла
5) Получен верный ответ на первый вопрос . . . . 1 балл
6) Правильно записано условие плавания в третьем случае . . . . 2 балла
7) Получен верный ответ на второй вопрос . . . . 1 балл

Указания проверяющим:

1) Выражение для массы оболочки может быть сразу написано внутри условий плавания, в этом случае балл за пункт 1 ставить.

2) Учащийся может не вычислять числовое значение μ и не записывать явно формулу, но при этом найти верное значение r. Поэтому, если пункт 5 критериев выполнен, то балл за пункт 3 ставится автоматически.

Максимально возможный балл в 9 классе 50