10 КЛАСС

1. На метеостанции в Туруханске перед началом мощного снегопада были зарегистрированы: температура воздуха t_0 = -13^{0}С и атмосферное давление p_0 = 730 мм.рт.рт. В результате снегопада выпало h = 12 мм воды. Считая воздух идеальным двухатомным газом, определите изменение его температуры ΔT у земной поверхности сразу после снегопада вследствие трения снежинок о воздух. Считать, что за время снегопада давление не изменилось. Изменением температуры снежинок пренебречь. Плотность жидкой воды ρ_0 = 1 г/см^3, плотность ртути ρ = 13,6 г/см^3.

   Указание:
   - Количество осадков равно толщине слоя воды в цилиндрическом осадкомерном ведре, получившейся из попавшего в него и растаявшего в нём снега.
   - Молярная теплоёмкость идеального двухатомного газа при постоянном давлении равна C_p = 3,5R

Решение:

Снежинки движутся равномерно, поэтому сила сопротивления равна силе тяжести.

По третьему закону Ньютона такая же сила действует на воздух.

Следовательно, при падении массы снега m в слое высотой z работа сил трения, действующих на воздух, равна $A = mgz$.

Работа A в слое толщиной z приводит к увеличению внутренней энергии воздуха количеством ν.

$$mgz = C_p \nu \Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta T = \frac{mgz}{C_p \nu}$$

Количество воздуха в слое толщиной z и площадью основания S: $\nu = \frac{p_0 V}{RT_0} = \frac{p_0 Sz}{RT_0}$

Масса снежинок, пересекшая этот слой: $m = \rho_0 Sh$

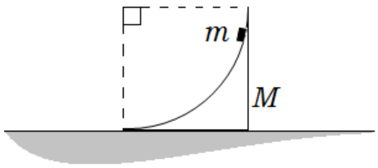
Обозначим высоту ртутного столба h_0. Атмосферное давление $p_0 = \rho g h_0$. Тогда

$$\Delta T = \frac{mgz}{C_p \nu} = \frac{\rho_0 Shgz}{3{,}5R \cdot \frac{p_0 Sz}{RT_0}} = \frac{\rho_0 hg}{3{,}5 p_0} \cdot T_0 = \frac{\rho_0 h}{3{,}5 \rho h_0} \cdot T_0 = \frac{1\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 12\text{ мм}}{3{,}5 \cdot 13{,}6\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 730\text{ мм}} \cdot (273 - 13) \approx 0{,}1℃$$

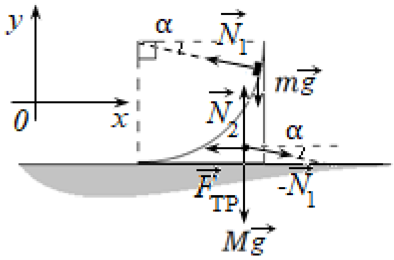
Ответ: $\approx 0{,}1℃$

Закон сохранения импульса	+1 балл
Постоянство скорости центра масс	+1 балл
Вычисление модуля скорости центра масс	+1 балл
Представление движения палочки как суммы поступательного и вращательного	+2 балла
Определение скоростей концов палочки в ИСО центра масс	+1 балл
Определение центростремительного ускорения концов палочки	+2 балла
Указание на то, что ускорение не меняется при переходе от одной ИСО к другой ИСО	+1 балл
Вычисление радиуса кривизны в неподвижной системе отсчёта.	+1 балл

2. На горизонтальном столе стоит горка массой M с профилем в виде четверти окружности (см. рис.). С вершины горки без начальной скорости отпускают маленькую шайбу массой m. Шайба начинает соскальзывать без трения. Когда шайба находилась на 5/12 её высоты, горка начала скользить по столу. Определите коэффициент трения скольжения μ горки по столу, если $M/m = 3$.



Решение:



На рисунке укажем все силы, действующие на шайбу и горку. Запишем II закон Ньютона в векторном виде для шайбы:

$$\vec{N}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Спроектируем на направление перпендикуляра к горке:

$$N_1 - mg\sin\alpha = ma$$

Проекция ускорения на это направление равна:

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad N_1 - mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

Согласно закону сохранения полной механической энергии

$$mgR = \frac{5}{12}mgR + \frac{mv^2}{2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{7}{6}gR \quad \rightarrow \quad N_1 - mg\sin\alpha = \frac{7}{6}mg$$

Высота шайбы над столом

$$h = R(1-\cos\alpha) = \frac{5}{12}R \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{7}{12} \approx 0{,}583 \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{95}}{12} \approx 0{,}812$$

Подставим в предыдущую строчку

$$N_1 - 0{,}812\,mg = \frac{7}{6}mg \quad \rightarrow \quad N_1 \approx 2mg$$

Запишем II закон Ньютона в векторном виде для горки:

$$\vec{F}_{\text{ТР}} + \vec{N}_2 - \vec{N}_1 + M\vec{g} = \vec{0}$$

Спроектируем уравнение на оси Ox и Oy:

$$\begin{cases} -F_{\text{ТР}} + N_1\cos\alpha = 0, \\ N_2 - Mg - N_1\sin\alpha = 0; \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F_{\text{ТР}} \approx 2mg\cdot 0{,}583, \\ N_2 = Mg + 2mg\cdot 0{,}812. \end{cases}$$

При начале скольжения сила трения становится равной силе трения скольжения

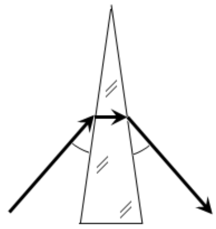
$$F_{\text{ТР}} \approx 2mg\cdot 0{,}583 = 1{,}17mg = \mu N_2 = \mu(Mg + 2mg\cdot 0{,}812)$$

$$\rightarrow \quad \mu = \frac{1{,}17\frac{m}{M}}{1 + 1{,}624\frac{m}{M}} = \frac{\frac{1{,}17}{3}}{1 + \frac{1{,}624}{3}} \approx 0{,}25$$

Ответ: 0,25

II закон Ньютона для шайбы в векторном виде	+1 балл
II закон Ньютона для шайбы в проекциях на радиус	+1 балл
Центростремительное ускорение	+1 балл
Вычисление угла и определение нормальной реакции горки N_1	+1 балл
II закон Ньютона в векторном виде для горки	+1 балл
II закон Ньютона для горки в проекциях на оси координат	+2 балла
Выражение для силы трения	+1 балл
Сила трения равна силе трения скольжения при начале скольжения	+1 балл
Вычисление коэффициента трения скольжения	+1 балл

3. Зимой в Восточной Сибири в морозную солнечную погоду в воздухе часто взвешены мелкие ледяные кристаллы в виде прямых правильных шестигранных призм – «алмазная пыль». Определите, на какой минимальный угол δ может отклониться солнечный луч, преломившись в таком кристалле. Показатель преломления льда *n* = 1,306. Указание: используйте тот факт, что при прохождении через призму, минимальный угол отклонения реализуется при симметричном ходе светового луча (см. рис.).



Решение:

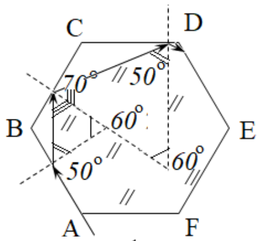
С одной стороны, солнечный луч, упав на грань ледяной призмы, не сможет войти в призму с углом преломления больше, чем критический угол полного внутреннего отражения

$$\alpha_{\text{КР}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}306}\right) \approx 50^0$$

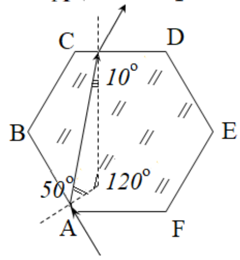
С другой стороны, этот же луч сможет покинуть призму, если упадёт на одну из соседних граней под углом падения большим, чем $\alpha_{\text{КР}}$.

Пусть солнечный луч упал на одну из граней призмы. Он проникнет в призму под углом $\alpha \le \alpha_{\text{КР}}$ к перпендикуляру к грани. Упав изнутри призмы на другую грань, преломившись, выйдет в воздух. Угол преломления будет тем больше, чем угол падения. Угол отклонения луча равен разности углов падения и отражения. Поэтому, минимальное отклонение будет соответствовать минимальному углу падения. Т.е. достаточно рассмотреть случай, когда перпендикуляры обеих преломляющих граней лежат в общей плоскости падения.

Рассмотрим сечение призмы, параллельное основаниям (в этом сечении лежат перпендикуляры к боковым граням). Минимальный угол падения при втором преломлении соответствует максимальному углу падения при первом преломлении. Пусть этот угол близок к 90^0. Тогда угол первого преломления равен 50^0.

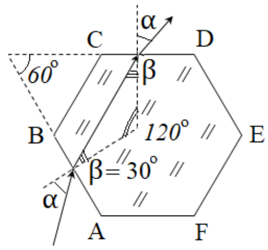


Предположим, что этот луч упал на соседнюю грань BC (см.рис.). Тогда угол падения при втором преломлении окажется равным 70^0. Луч не выйдет в воздух, и полностью отразится (напомним, что для лучей, распространяющихся в наклонённых к данной плоскостях, угол падения будет ещё больше). Значит, ни при каких обстоятельствах луч не сможет выйти через соседнюю грань.



Однако, после первого преломления, луч может попасть на грань CD. Согласно геометрическому анализу (см.рис.), минимальный угол падения на грань CD составит 10^0. Значит, через эту грань могут выйти и другие лучи (входящие в призму через грань AB под острыми углами падения)

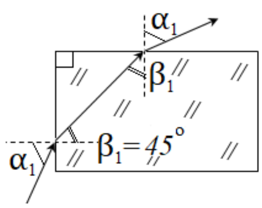
Будем рассматривать грани AB и CD как грани треугольной призмы с преломляющим углом 60^0. Минимальное отклонение луча будет при симметричном его ходе.



Минимальный угол отклонения луча

$$\delta = 2(\alpha - \beta) = 2(\arcsin(1{,}306 \cdot \sin 30^0) - 30^0) \approx 21{,}8^{\circ}$$

Существует её одна возможность прохождения луча через призму: луч входит через основание и выходит через одну из боковых граней. В этом случае преломляющий угол призмы равен 90^0. При этом минимальный угол отклонения луча:



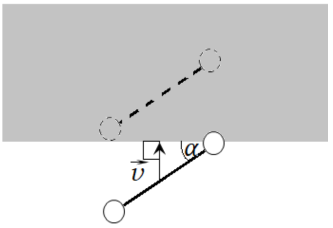
$$\delta_1 = 2(\alpha_1 - \beta_1) = 2(\arcsin(1{,}306 \cdot \sin 45^0) - 45^0) \approx 44{,}9^{\mathrm{o}}$$

Поскольку $\delta_1 > \delta$, $\delta_{min} = \delta = 21{,}8^{\mathrm{o}}$.

Ответ: $21{,}8^{\mathrm{o}}$

Вычислен критический угол полного внутреннего отражения	+1 балл
Явное **обоснованное** указание на минимальность угла отклонения лучей, идущих в плоскости, в которой лежат перпендикуляры первой и второй границ сред.	+3 балла
Доказательство того, что луч не может проходить через две смежные боковые грани	+2 балла
Доказательство того, что луч не может проходить через две несмежные боковые грани	+1 балл
Использование симметрии хода луча для нахождения минимального угла отклонения	+2 балла
Доказательство того, что лучи, прошедшие через основание призмы идут под бОльшими углами	+1 балл

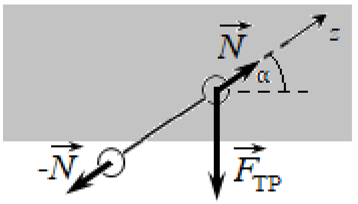
4. По гладкому горизонтальному столу поступательно движется гантелька – два маленьких одинаковых грузика, соединенных жестким невесомым стержнем длиной l. В некоторый момент времени гантелька въезжает н шероховатый участок стола так, что ее скорость $\vec{v}$ оказывается перпендикулярна границе участка, а стержень расположен под углом α к ней. Вид сверху изображен на рисунке. Определите, какую угловую скорость ω приобретет гантелька, въехав на шероховатый участок. Считать, что за время въезда направление стержня не успевает существенно изменится. Коэффициент трения скольжения грузиков о шероховатый участок стола равен μ.



Решение:

I способ

При перемещении из начального в конечное положение на гантель действовала сила трения скольжения



$$F_{\text{ТР}} = \mu m g$$

Согласно II закону Ньютона центр масс гантели двигался с ускорением

$$a = \frac{F_{\text{ТР}}}{2m} = \frac{\mu g}{2}$$

Скорость центра масс за время τ (время въезда гантели) уменьшится на $a\tau$ и составит

$$v_C = v - a\tau = v - \frac{\mu g \tau}{2}$$

На передний грузик действует вдоль стержня вперёд сила реакции $\vec{N}$, а на задний грузик назад сила $-\vec{N}$. Изменения проекций скоростей переднего и заднего грузиков на направление стержня (ось Oz) за время въезда τ составят:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_{1_z} &= \sum \frac{N_i(t_i)}{m}\Delta t_i - \mu g \tau \cdot \sin\alpha \\ \Delta v_{2_z} &= -\sum \frac{N_i(t_i)}{m}\Delta t_i \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \Delta v_{1_z} = \Delta v_{2_z} \quad \rightarrow \quad \sum \frac{N_i(t_i)}{m}\Delta t_i = \frac{\mu g \tau}{2} \cdot \sin\alpha$$

Здесь мы всё время движения мысленно разбиваем на такие малые промежутки Δt_i, что на них величину силы $N_i(t_i)$ можно считать постоянной, а затем суммируем вызванные ими изменения проекций скоростей грузиков. Эти изменения должны быть равны, поскольку стержень жёсткий.

Проекции скоростей грузиков на оси *Ox* и *Oy* относительно неподвижной ИСО равны:

$$v_{1_y} = v + \sin\alpha \cdot \sum \frac{N_i(t_i)}{m}\Delta t_i - \mu g\tau = v + \sin^2\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2} - \mu g\tau$$

$$v_{2_y} = v - \sin\alpha \cdot \sum \frac{N_i(t_i)}{m}\Delta t_i = v - \sin^2\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2}$$

$$v_{1_x} = \cos\alpha \cdot \sum \frac{N_i(t_i)}{m}\Delta t_i = \sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2}$$

$$v_{2_x} = -\cos\alpha \cdot \sum \frac{N_i(t_i)}{m}\Delta t_i = -\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2}$$

Проекции скоростей грузиков на оси *Ox* и *Oy* относительно ИСО, движущейся со скоростью центра масс равны:

$$v'_{1_y} = -(1-\sin^2\alpha) \cdot \frac{\mu g\tau}{2} = -\cos^2\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2}$$

$$v'_{2_y} = (1-\sin^2\alpha) \cdot \frac{\mu g\tau}{2} = \cos^2\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2}$$

$${v_{1_x}}' = \sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2}$$

$${v_{2_x}}' = -\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{\mu g\tau}{2}$$

Модуль вращательной скорости грузиков:

$$v_{\text{ВР}} = \sqrt{\left(v'_{1_y}\right)^2 + \left({v_{1_x}}'\right)^2} = \frac{\mu g\tau}{2} \cdot \sqrt{(\cos^2\alpha)^2 + \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\mu g\tau}{2} \cdot \cos\alpha$$

Угловая скорость вращения гантели:

$$\omega = \frac{v_{\text{ВР}}}{\left(l/2\right)} = \frac{\mu g\tau}{l} \cdot \cos\alpha$$

Определим время въезда из кинематики центра масс

$$l\sin\alpha = v\tau - \frac{\mu g}{4}\tau^2$$

Решение квадратного уравнения относительно неизвестного τ:

$$\tau_{1,2} = \frac{2v}{\mu g}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\mu g l}{v^2} \cdot \sin\alpha}\right)$$

Следует выбрать знак «-», поскольку он соответствует первому появлению центра масс гантели на расстоянии $l\sin\alpha$ от исходного положения.

Итак, угловая скорость:

$$\omega = \frac{2v}{l}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g l}{v^2} \cdot \sin\alpha}\right) \cdot \cos\alpha$$

II способ

Запишем изменение момента импульса гантели относительно центра масс за время τ:

$$\Delta L = M\tau \quad \rightarrow \quad 2m\omega\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} = \mu mg\frac{l}{2}\cos\alpha\,\tau \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\mu g\tau}{l}\cdot\cos\alpha$$

Время въезда определим также, как в первом способе

$$\tau = \frac{2v}{\mu g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g l}{v^2}\cdot\sin\alpha}\right)$$

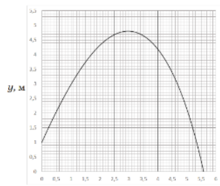
Таким образом,

$$\omega = \frac{2v}{l}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g l}{v^2}\cdot\sin\alpha}\right)\cdot\cos\alpha$$

Ответ: $\frac{2v}{l}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g l}{v^2}\cdot\sin\alpha}\right)\cdot\cos\alpha$

I способ	
Определение ускорения центра масс	+1 балл
Определение скорости центра масс в конечный момент времени	+1 балл
Учёт силы реакции стержня	+1 балл
Определение изменения скорости, связанное с действием силы реакции	+1 балл
Использование жёсткости стержня	+1 балл
Определение проекций скоростей в неподвижной ИСО	+1 балл
Определение проекций скоростей в ИСО, связанной с центром масс	+1 балл
Вращательная скорость	+1 балл
Определение времени въезда	+1 балл
Определение угловой скорости	+1 балл
II способ	
Уравнение моментов для гантели	+7 баллов
Определение времени въезда	+2 балла
Определение угловой скорости	+1 балл

5. Небольшой мячик бросили под углом к горизонту. На рисунке изображена траектория мячика (*Ox* – горизонтальная ось, *Oy* – вертикальная ось). Определите скорость мячика в верхней точке.



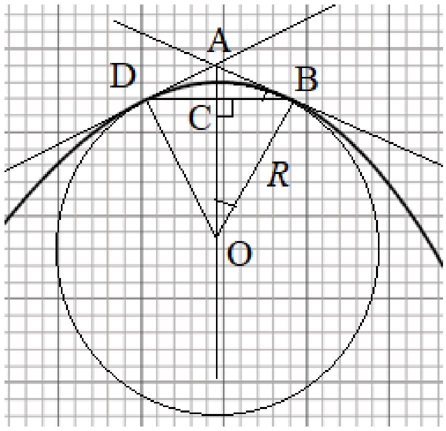
Решение:

Сила сопротивления воздуха в верхней точке направлена горизонтально, поэтому центростремительное ускорение мячика равно $\vec{g}$.

Центростремительное ускорение:

$$g = \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{gR}$$

Радиус кривизны траектории вблизи вершины определим из графика. Проведём две касательных к графику в двух точках D и B на одной вертикали с обеих сторон вершины. Касательные пересекутся в точке A. Проведём также отрезок DB и опустим на него перпендикуляр AC из точки A. *Остальные линии на рисунке в решении (окружность и радиусы) приведены лишь для доказательства формулы, и не требуются в работах!*



Треугольники COB и CBA подобны. Поэтому

$$\frac{OB}{AB} = \frac{CB}{AC} \quad \rightarrow \quad R = AB \cdot \frac{CB}{AC} = CB \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{CB}{AC}\right)^2}$$

Посчитаем сначала в клетках, а потом умножим на 0,1 м:

$$R = 4{,}5 \text{ кл} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{4{,}5 \text{ кл}}{2 \text{ кл}}\right)^2} \approx 11{,}1 \text{ кл} \approx 1{,}1 \text{ м}$$

Итак,

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1{,}1\text{м}} \approx 3{,}3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: $\approx 3{,}3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Если не учтена сила сопротивления воздуха, то за решение не больше 3 баллов!

Сила сопротивления воздуха направлена горизонтально	+1 балл
Центростремительное ускорение равно ускорению свободного падения.	+2 балла
Вычисление радиуса кривизны вблизи вершины с точностью не хуже 10% (вычисление может быть выполнено любым адекватным способом, в.т.ч. аналитически)	+5 баллов
Вычисление скорости мячика	+2 балла