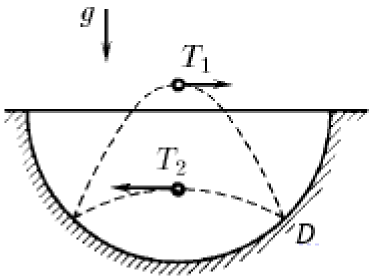
1. «Дюймовочка»

    В сферической яме около кротовьей землянки лежит Дюймовочка (D) и думает о жизни, бросая и ловя маленький, упругий теннисный мяч. Траектория мяча показана на рисунке. Во время раздумий ей стало интересно, чему равно произведение промежутков времени полета мяча до и после удара, T_1 и T_2 соответственно. Помогите Дюймовочке определить это произведение, если радиус ямы R.



Возможное решение:

Траектории, по которым движется мяч особенны тем, что скорости с нормалью в точке D составляют равные углы α и β, а дальности полёта равные.

$v_1 cos\beta T_1 = v_2 cos\alpha T_1$ (1)

$v_1 = v_2 = v$

$v sin\beta T_1 - \frac{gT_1^2}{2} = 0$ (2)

$v sin\alpha T_2 - \frac{gT_2^2}{2} = 0$ (3)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} => \cos(\alpha+\beta) = cos\alpha * cos\beta - sin\alpha * sin\beta = 0 => cos\alpha * cos\beta = sin\alpha * sin\beta$ (4)

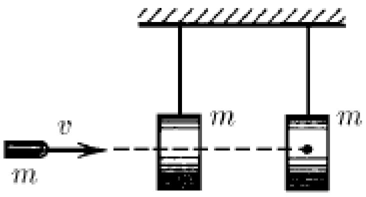
Решая эту систему уравнений, получим $R = \frac{gT_1T_2}{2\sqrt{2}} => T_1T_2 = \frac{2\sqrt{2}R}{g}$

Система оценивания задачи:

1) Получено уравнение (1) – **2 балла**
2) Получено уравнение (2) – **2 балла**
3) Получено уравнение (3) – **2 балла**
4) Получено соотношение (4) – **2 балла**
5) Найдено произведение T_1T_2 – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. Пуля массы m, имеющая начальную скорость v, пробивает подвешенный на нити груз той же массы m и застревает во втором таком же. Найдите выделившееся в первом грузе количество теплоты, если во втором грузе выделилось количество теплоты Q_2. Временем взаимодействия пули с грузом пренебречь.



Возможное решение:

1) Поскольку временем взаимодействия пули с грузом пренебрегаем, ЗСИ выполняется для первого и для второго взаимодействия:
   $mv = mv_1 + mv_2$, где v_1 – скорость первого груза после пробития, v_2 – скорость пули после пробития

$mv_2 = mu + mu$, u – скорость пули и второго груза после того, как пуля застряла в грузе (движутся вместе)

2) ЗСЭ для первого и второго взаимодействия выглядят так:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m{v_1}^2}{2} + \frac{m{v_2}^2}{2} + Q_1$$
$$\frac{m{v_2}^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + Q_2$$

3) Решив систему уравнений, получим, что $Q_1 = 2v\sqrt{mQ_2} - 4Q_2$

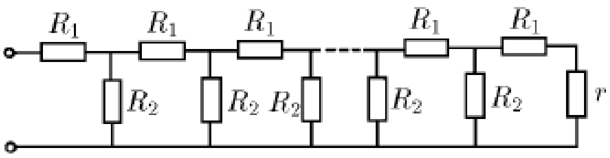
Система оценивания задачи:

1) Записан ЗСИ для первого взаимодействия – **1 балл**
2) Записан ЗСИ для второго взаимодействия – **2 балла**
3) Записан ЗСЭ для первого взаимодействия – **1 балл**
4) Записан ЗСЭ для второго взаимодействия – **2 балла**
5) Получено конечное выражение для Q_1 – **4 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

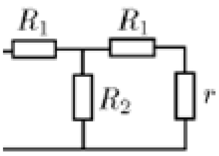
3. «Аттенюатор»

Аттенюатор — это электронное устройство, которое уменьшает амплитуду или мощность сигнала без существенного искажения его формы. Его схема представлена на рисунке. Какими должны быть сопротивления R_1 и R_2, чтобы на каждом следующем сопротивлении R_1 напряжение было в 10 раз меньше, чем на предыдущем? Сопротивление r дано. Пунктир означает произвольность количества элементов.



Возможное решение:

Рассмотрим самую правую часть схемы:



Напряжение на R_1 рядом с r должно быть в 10 раз меньше, чем у предыдущего.

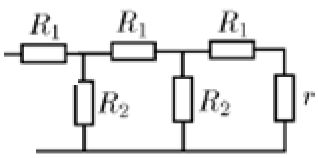
Распишем законы последовательного и параллельного соединения на этой схеме.

Пусть $U_0 = I_0 * R_1$ – напряжение на самом последнем сопротивлении R_1. Тогда $U_1 = I_1 * R_1 = 10I_0 * R_1$, то есть $I_1 = 10I_0$.

Напряжение в параллельном соединении одинаковое, следовательно, общий ток $I_1 = I_0 * \left(1 + \frac{R_1 + r}{R_2}\right)$.

Отсюда находим, что $R_2 = \frac{R_1 + r}{9}$.

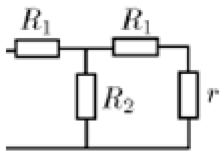
Аналогично, рассмотрев следующий элемент цепи, получим:



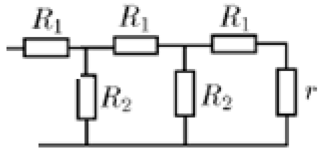
$$I_2 = I_1 * \left(1 + \frac{9}{10}\frac{11R_1 + r}{R_1 + r}\right);\ I_2 = 10I_1$$

Откуда $R_1 = 9r$, $R_2 = \frac{10}{9}r$.

Система оценивания задачи:



1) Рассмотрен такой элемент и выписаны законы последовательного и параллельного соединения – **2 балла**
2) Получено $R_2 = \frac{R_1 + r}{9}$ – **2 балла**

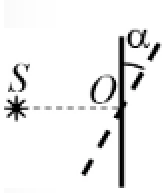


3) Рассмотрен следующий элемент и выписаны законы последовательного и параллельного соединения – **2 балла**
4) Получено $R_1 = 9r$ – **2 балла**
5) Получено $R_2 = \frac{10}{9}r$ – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

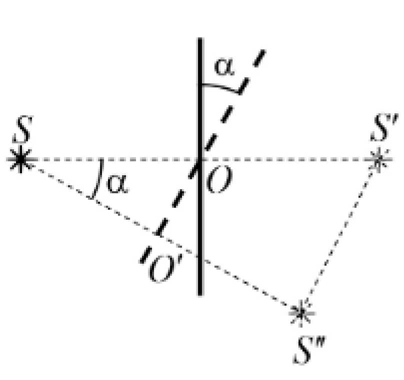
4. «В тёмной-тёмной комнате»

   В тёмной-тёмной комнате летал светлячок. В некоторый момент времени он обнаружил плоское зеркало перед собой. Вдруг, зеркало начали поворачивать равноускоренно вокруг оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через точку O (конечное положение показано пунктиром). Найдите угловое ускорение β, с которым двигалось зеркало, если светлячок был на расстоянии l от зеркала в момент начала поворота, а перемещение изображения за промежуток времени $\tau = 3$ с равно l.



Возможное решение: Рассмотрим поворот зеркала на некоторый угол α. Построение старого (S′) и нового (S) изображения источника выполнено на рисунке. По построению угол SS″S′ — прямой. Действительно, треугольники SO′O и SS″S′ подобны, так как у них общий угол α, а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$



Движение изображения вокруг точки O – это ускоренное движение по окружности, причём угловое ускорение, с которым будет двигаться изображение равно угловому ускорению, с которым вращается зеркало. По построению видно, что центральный угол, на который опирается хорда S″S′ равен $\Delta\varphi = 60°$, так как хорда равна радиусу. Следовательно, за время τ зеркало повернулось на 60°. Тогда угловое ускорение β находим так: $\Delta\varphi = \frac{\beta\tau^2}{2} => \beta = \frac{2\Delta\varphi}{\tau^2} = \frac{2\pi}{9}$ с$^{-2}$

Система оценивания задачи:

1) Сделано корректное построение изображения в зеркале в начальный момент – **2 балла**
2) Сделано корректное построение изображения в зеркале в конечный момент – **2 балла**
3) Найден $\Delta\varphi$ – **3 балла**
4) Найдено β – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «А что в сосуде?»

В калориметр с водой при температуре $t_1 = 10℃$ впустили водяной пар при температуре $t_3 = 100℃$ и бросили кусочек льда при температуре $t_2 = -20℃$. Какая температура установится в калориметре и какое количество воды окажется в нём? Начальная масса воды в калориметре равна $m_1 = 200$ г, масса кусочка льда $m_2 = 300$ г, масса пара равна $m_3 = 70$ г. Удельная теплоёмкость льда равна $c_2 = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}*℃}$, удельная теплоёмкость воды равна $c_1 = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}*℃}$, удельная теплота плавления льда равна $\lambda = 3{,}3 * 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$, удельная теплота парообразования воды равна $L = 2{,}3 * 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

Возможное решение:

1) Поскольку вся системы находится в калориметре, можно будет записать таким образом уравнение теплового баланса: $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$, где Q_1 – количество теплоты, полученное льдом, Q_3 – количество теплоты, отданное паром, Q_2 – количество теплоты, полученное или отданное водой.
2) Поскольку неизвестно, в каком состоянии окажется лёд, вода и пар в конце, проведём оценку этого состояния методом проб (посчитаем количество теплоты на разные процессы, которые точно будут протекать).
3) Количество теплоты, которое может отдать пар при полной конденсации равно $Lm_3 = 161$ кДж;
4) Количество теплоты, которое может принять лёд при нагревании до температуры плавления равно $c_2m_2(t_0 - t_2) = 12{,}6$ кДж; это меньше, чем количество теплоты, которое отдаст пар при конденсации, следовательно, лёд точно нагреется до 0 градусов по Цельсию и начнёт таять.
5) Количество теплоты, которое необходимо для полного плавления льда равно $\lambda m_2 = 99$ кДж; это меньше остатка от теплоты пара при конденсации, значит, лёд расплавится полностью.
6) Количество теплоты, необходимое для нагревания воды, образовавшейся изо льда до 10℃ равно $c_1m_2(t_1 - t_0) = 12{,}6$ кДж, что пока меньше остатка от теплоты пара.
7) Теплота на нагревание воды $m_1 + m_2$ до температуры кипения равна $c_1(m_1 + m_2)(t_3 - t_1) = 189$ кДж. Это даже больше, чем пар отдаст, в общем, при конденсации, следовательно, конечное состояние всех тел в системе – жидкое. Значит, общее количество воды в конце будет равно $m_1 + m_2 + m_3 = 570$ г.
8) Конечная температура t находится из уравнения теплового баланса: $-Lm_3 + c_1m_3(t - t_3) + c_1(m_1 + m_2)(t - t_1) + c_1m_2(t_1 - t_0) + \lambda m_2 + c_2m_2(t_0 - t_2) = 0$
9) $t = \frac{\frac{Lm_3 - c_1m_2(t_1 - t_0) - \lambda m_2 - c_2m_2(t_0 - t_2)}{c_1} + m_3t_3 + (m_1 + m_2)t_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 36{,}4℃$

Система оценивания задачи:

1) Показано, что необходимо проводить оценку количеств теплоты для выяснения конечного состояния системы – **2 балла**
2) Рассчитано количество теплоты из п. 3 – **1 балл**
3) Рассчитано количество теплоты из п. 4 – **1 балл**
4) Рассчитано количество теплоты из п. 5 – **1 балл**
5) Рассчитано количество теплоты из п. 6 – **1 балл**
6) Рассчитано количество теплоты из п. 7 – **1 балл**
7) Выяснено, что конечное состояние будет жидким – **1 балл**
8) Записано уравнение теплового баланса из п 8 – **1 балл**
9) Вычислена конечная температура системы – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов