

Ответы
10 класс

10.1. **С конька на отмычку. (Зайцев Р.В.)** Шарик толкнули вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью $v_0 = 12$ м/с. В течение второй секунды движения направление скорости шарика не менялось и совпадало с направлением начальной скорости, а модуль его перемещения оказался равен $s_2 = 4,5$ м. Определите:

- а. ускорение шарика, считая его постоянным;
- б. через какое время после толчка шарик остановился;
- с. путь, пройденный шариком за третью секунду.

Возможное решение.

1) Интервал времени в одну секунду обозначим τ . Тогда перемещение шарика за вторую секунду:

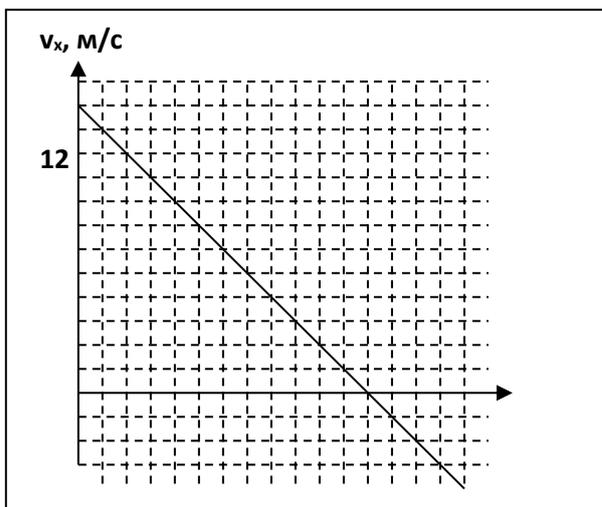
$$s_2 = \left(v_0 2\tau - \frac{a(2\tau)^2}{2} \right) - \left(v_0 \tau - \frac{a\tau^2}{2} \right) = v_0 \tau - \frac{3a\tau^2}{2};$$

$$a = \frac{2(v_0 \tau - s_2)}{3\tau^2} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

2) Время остановки найдём через формулу мгновенной скорости:

$$0 = v_0 - aT \Rightarrow T = \frac{v_0}{a} = 2,4 \text{ с}.$$

3) Для упрощения дальнейшего решения построим график зависимости проекции скорости шарика на ось Ox , сонаправленную с начальной скоростью, от времени:



В течение третьей секунды шарик меняет направление своего движения. Участки путей вверх и вниз по плоскости находим как площади под графиком:

$$l_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,4 = 0,4(\text{м});$$

$$l_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,6 = 0,9(\text{м}).$$

Тогда путь шарика за третью секунду $l_3 = l_1 + l_2 = 1,3$ м.

Критерии оценивания

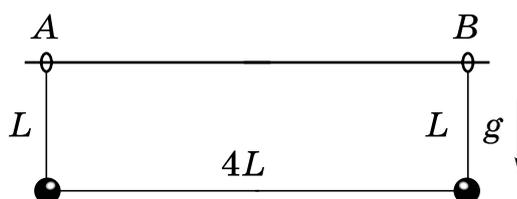
№	Критерий	Балл
---	----------	------

1	Использовано уравнение равноускоренного движения	1
2	Использовано уравнение скорости при РУД	1
3	Получено выражение для перемещения за 2ю секунду	2
4	Найдено ускорение (по 0,5 баллов за формулу и число)	1
5	Найдено время остановки	1
6	Установлено, что за 3ю секунду тело меняет направление движения	1
7	Найден путь за 3ю секунду	3
	max	10,0

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи. Численные ответы без единиц измерения не засчитываются.

10.2. Бусы Ньютона. (Вергунов А.Ю.) На горизонтальный стержень надеты маленькие невесомые колечки A и B , которые могут без трения перемещаться по стержню. К колечкам прикреплена невесомая нить. На нить надеты две одинаковые массивные маленькие бусинки, которые могут без трения перемещаться по нити. В начальный момент бусинки удерживают так, что нить натянута, длина ее горизонтального участка $4L$, длина каждого вертикального участка L . Бусинки одновременно отпускают. Считая известным ускорение свободного падения g , найдите:



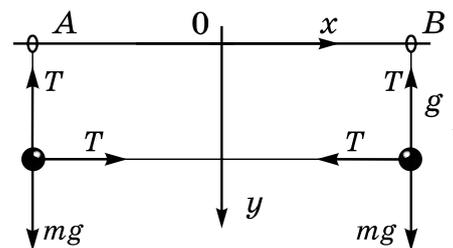
- координаты первой встречи бусинок;
- ускорения каждой из бусинок;
- время, через которое бусинки впервые встретятся;
- путь, который пройдет каждая бусинка до встречи.

Возможное решение

На каждое из колечек действуют только две вертикальные силы: сила натяжения нити T и сила нормальной реакции опоры N со стороны стержня. Так как колечки невесомы на них не может действовать некомпенсированная горизонтальная сила, следовательно не может появиться проекции силы натяжения нити на горизонтальную ось. Таким образом вертикальные участки нити, прикрепленные к кольцам, в любой момент времени движения будут оставаться вертикальными.

В силу симметрии участок нити, соединяющий бусинки, все время движения до встречи будет оставаться горизонтальным (бусинки одинаковые, модуль силы натяжения везде одинаковый).

Расставим силы, действующие на бусинки в произвольный момент времени, и введем декартову систему координат (ось y направлена вниз, ось x направлена вправо, начало координат по середине между начальными положениями бусинок).



На систему не действуют никакие внешние горизонтальные силы, а значит, по теореме о движении центра масс, центр масс системы может перемещаться только вдоль одной вертикали. Тогда координаты первой встречи $(0; 3L)$, так как общая длина всей нити $6L$.

Рассмотрим правую бусинку. Её координаты в произвольный момент времени $(x; y)$, тогда половину длины нити в любой момент времени движения можно представить в виде:

$$3L = x + y;$$

$$y = 3L - x.$$

Таким образом из уравнения траектории движения правой бусинки видно, что движение будет происходить по прямой, наклоненной под углом 45° к горизонту. Аналогичными рассуждениями можем получить, что характер движения левой бусинки будет таким же.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на Oxy для правой бусинки:

$$-ma_x = -T;$$

$$ma_y = mg - T.$$

Так как полное ускорение направлено под углом 45° к горизонту $a_x = a_y$, тогда:

$$T = \frac{mg}{2};$$

$$a_x = \frac{g}{2};$$

$$a_0 = \frac{a_x}{\cos(45^\circ)} = \frac{g}{\sqrt{2}}.$$

Найдем время, через которое произойдет встреча:

$$x = 2L = \frac{a_x t^2}{2};$$

$$t = \sqrt{\frac{4L}{a_x}} = \sqrt{\frac{8L}{g}}.$$

Путь, который пройдет бусинка:

$$s = \frac{2L}{\cos(45^\circ)} = 2\sqrt{2}L.$$

Время движения, модуль ускорения и путь левой бусинки такие же, как у правой.

Критерии оценивания

№	Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Доказательство того, что вертикальные участки нити, всегда остаются вертикальными	1,0
2	Доказательство того, что горизонтальный участок нити, всегда остается горизонтальным	1,0
3	Доказательство того, что центр масс движется по одной вертикали (или аналогичные утверждения)	0,5
4	Найдены верные координаты встречи	1,0
5	Найдено уравнение движения для одной из бусинок (при отсутствии баллов за пункты 1 и 2 не оценивать)	1,0

6	Утверждение, что полное ускорение направлено под углом 45° к горизонту	1,0
7	Записан второй закон Ньютона (или аналогичное верное выражение)	1,0
8	Найдено полное ускорение	1,0
9	Найдено время, через которое произойдет встреча	1,0
10	Найден путь, который проходит бусинка	1,0
11	Указание на то, что для второй бусинки все ответы аналогичные	0,5

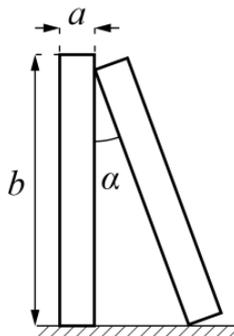
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

Постучим костяшками. (Яворский В.А.) Две одинаковые костяшки домино стоят на шероховатой поверхности – костяшка A стоит вертикально, костяшка B – под углом α , опираясь ребром на грань костяшки A . При каких углах α система будет находиться в равновесии?

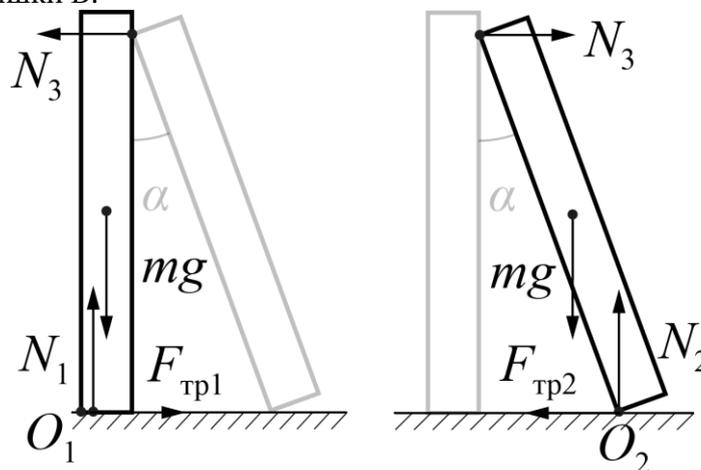
Высота костяшки – a , ширина – b ($b \ll a$), масса – m , коэффициент трения между костяшками и поверхностью – μ . Коэффициент трения между костяшками пренебрежимо мал. Система находится в однородном поле сил тяготения с ускорением свободного падения g .

НА РИСУНКЕ БЫЛИ ПЕРЕПУТАНЫ a и b . ЕСЛИ РЕБЕНОК ИСПОЛЬЗОВАЛ В РЕШЕНИИ ОБОЗНАЧЕНИЯ С РИСУНКА, ОЦЕНИВАЕМ В ПОЛНОЙ МЕРЕ.



Возможное решение.

Пусть mg – сила тяжести, N_1 – сила нормальной реакции опоры со стороны поверхности на фишку A , N_2 – сила нормальной реакции опоры со стороны поверхности на фишку B , N_3 – сила реакции опоры между фишками, $F_{\text{тр}1}$ – сила трения покоя для фишки A , $F_{\text{тр}2}$ – сила трения покоя для фишки B .



Условие равновесия для фишки A :

$$\text{По вертикали: } N_1 = mg \quad (1)$$

$$\text{По горизонтали: } N_3 = F_{\text{тр}1} = \mu N_1 \leq \mu mg \quad (2)$$

Уравнение равенства моментов сил относительно точки O_1 , с учётом того, что при перевороте точка приложения силы N_1 сместится к O_1 :

$$N_3 \cdot a \cos \alpha = mg \frac{b}{2} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получаем:

$$mg \frac{b}{2} \leq \mu mg \cdot a \cos \alpha ;$$

$$\cos \alpha \geq \frac{b}{2\mu a} ;$$

$$0 < \alpha \leq \arccos \left(\frac{b}{2\mu a} \right). \quad (4)$$

Решение существует при $\frac{b}{a} < 2\mu$.

Условие равновесия для фишки *B*:

По вертикали: $N_2 = mg$ (5)

По горизонтали: $N_3 = F_{\text{тр}2} = \mu N_2 \leq \mu mg$ (6)

Уравнение равенства моментов сил относительно точки O_2 :

$$N_3 \cos \alpha \cdot a + mg \cos \alpha \cdot \frac{b}{2} = mg \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получаем:

$$mg \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} \leq \mu mg \cos \alpha \cdot a + mg \cos \alpha \cdot \frac{b}{2} ;$$

$$a \sin \alpha \leq (2\mu a + b) \cos \alpha ;$$

$$\text{tg} \alpha \leq 2\mu + \frac{b}{a} ;$$

$$0 < \alpha \leq \arctg \left(2\mu + \frac{b}{a} \right). \quad (8)$$

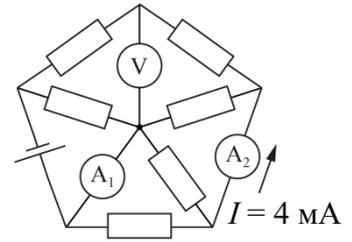
Конечное решение является пересечением интервалов (4) и (8).

№	Критерий	Балл
1	Сделан рисунок с расстановкой сил, или иначе описаны все силы с точками приложения	1
2	Два условия равновесия на силы для костяшки <i>A</i>	1
3	Правило моментов для костяшки <i>A</i>	1
4	Получено первое неравенство на угол α или его тригонометрическую функцию	2
5	Два условия равновесия на силы для костяшки <i>B</i>	1
6	Правило моментов для костяшки <i>B</i>	1
7	Получено второе неравенство на угол α или его тригонометрическую функцию	2
8	Указано, что ответ должен удовлетворять одновременно двум неравенствам	1
	max	10,0

Примечание для жюри

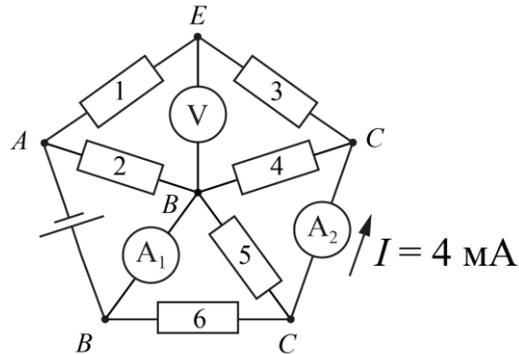
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

10.4.Однажды в схеме... (Жигар А.Н.) В цепи, схема которой изображена на рисунке, все приборы идеальные. Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны 1кОм . Через второй амперметр течет ток силой 4мА . Найдите показания приборов и напряжение идеального источника.

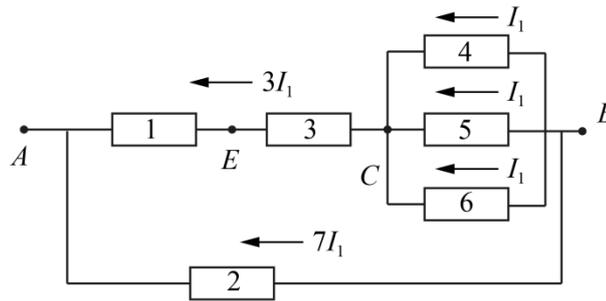


Возможное решение:

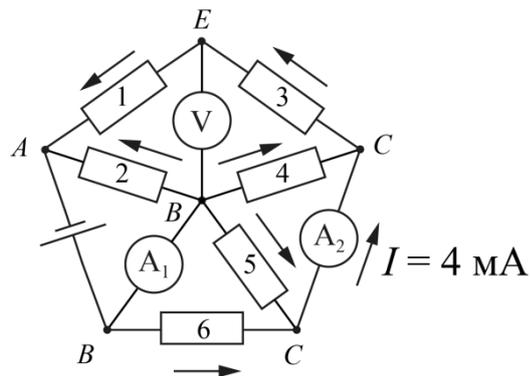
Так как приборы идеальные амперметры можно считать перемычками, а через вольтметры ток не идет. Перисуем схему.



Расставим токи с учетом свойств последовательного и параллельного соединения резисторов.



Вернемся к изначальной схеме и перенесём токи через резисторы.



В узел C входит ток $2I_1$. Значит $I = 2I_1; I_1 = 2\text{ мА}$. Ток через первый амперметр будет равен $I_{A1} = 9I_1 = 18\text{мА}$. Напряжение на вольтметре $U_V = U_3 + U_4 = I_1 R + 3I_1 R = 4\text{ В}$. Напряжение источника будет равно напряжению на втором резисторе $U_{\text{и}} = 7I_1 R = 14\text{В}$.

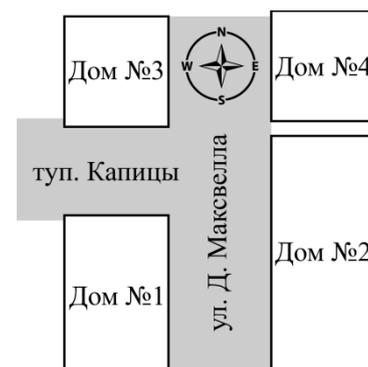
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Использованы свойства идеальных приборов	1
2	Получено соотношение сил токов в разных резисторах 1:3:7	2
3	На исходной схеме верно расставлены направления всех текущих через резисторы токов	2
4	Установлена связь между токами через резисторы и известным током	2
5	Правильно найдены показания первого амперметра (по 0,5 б за формулу и значение)	1
6	Правильно найдены показания вольтметра (по 0,5 б за формулу и значение)	1
7	Правильно найдено напряжение источника (по 0,5 б за формулу и значение)	1
	max	10,0

Примечание для жюри

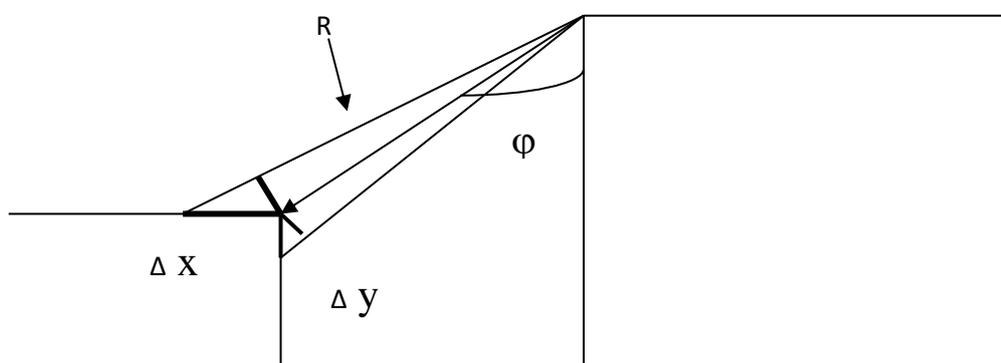
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи. Численные ответы без единиц измерения не засчитываются.

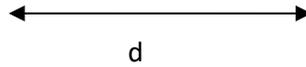
10.5. Тень на плетень. (Кармазин С.В.) В ясное летнее утро, когда продолжительность суток стала равной T , вертикальная граница тени от дома №2 движется вблизи угла дома №1 по его восточной стене со скоростью v_1 , а перейдя на его северную стену, со скоростью v_2 . Чему равна ширина улицы Д.Максвелла?



Возможное решение

Пусть между углами домов расстояние R , а угол между западной стеной дома №2 и направлением кратчайшего расстояния между углами домов равен φ (рис.2)





Пусть за время Δt солнечный луч поворачивается на угол $\Delta\varphi$. Тогда по восточной стене дома №1 он пройдет расстояние

$$\Delta y = \frac{R\Delta\varphi}{\sin\varphi} \Rightarrow V_1 = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t \sin\varphi} = \frac{R\omega}{\sin\varphi} \quad (1)$$

где ω – угловая скорость поворота солнечного луча, т.е. угловая скорость вращения Земли. Аналогично для северной стороны

$$V_2 = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t \cos\varphi} = \frac{R\omega}{\cos\varphi} \quad (2)$$

Таким образом $\operatorname{tg}\varphi = V_2/V_1$

Из (1) выразим $R = \frac{V_1 \sin\varphi}{\omega}$

Ширина улицы $d = R \sin\varphi = \frac{V_1 \sin^2\varphi}{\omega}$

Так как $\sin^2\varphi = \frac{\tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Окончательный ответ $d = T \frac{V_1 V_2^2}{2\pi(V_1^2 + V_2^2)}$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Получена связь скорости v_1 и угловой скорости/периода суточного движения Солнца	2
2	Получена связь скорости v_2 и угловой скорости/периода суточного движения Солнца	2
3	Получена связь скоростей с углом φ	2
4	Получена связь искомой ширины улицы с углом φ	2
5	Получен ответ	2
	max	10,0

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.