ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ
к задачам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по физике в 2023/2024 учебном году

10 класс

1. (10 баллов) Две частицы совершают движение вдоль одной прямой, выходя с интервалом T из одной точки с одинаковыми по направлению и величине начальными скоростями. Ускорения частиц также одинаковы по направлению и величине и постоянны. Частицы встречаются, пройдя пути, отличающиеся в два раза. Через какое время после начала движения первой частицы произошла встреча?

Ответ. Через время $\frac{\sqrt{3}+1}{2}T$.

Решение. Возьмем ось x в направлении начальных скоростей частиц и запишем координаты частиц в зависимости от времени (отсчитываемого от момента начала движения первой частицы) в виде

$$x_1 = V_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad x_2 = V_0(t-T) - \frac{a(t-T)^2}{2}$$

(V_0 и a – величины начальных скоростей и ускорений). Здесь учтено, что ускорения частиц направлены против начальных скоростей, иначе частицы не могли бы встретиться. Из условия $x_1 = x_2$ получаем выражение для момента встречи

$$t = \frac{V_0}{a} + \frac{T}{2}.$$

Из данного выражения следует, что встреча произошла через время $T/2$ после момента остановки первой частицы (V_0/a).

Путь, пройденный к моменту встречи первой частицей, складывается из пути до остановки $V_0^2/(2a)$ и пути после остановки $a(T/2)^2/2$, т.е.

$$S_1 = \frac{V_0^2}{2a} + \frac{aT^2}{8}.$$

Путь, пройденный второй частицей, равен ее перемещению:

$$S_2 = x_2 = V_0(t-T) - \frac{a(t-T)^2}{2}.$$

С учетом полученного выше выражения для момента встречи t приходим к формуле

$$S_2 = \frac{V_0^2}{2a} - \frac{aT^2}{8}.$$

Из условия $S_1 = 2S_2$ находим

$$\frac{V_0}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}T.$$

Подставляя это выражение в формулу для t, окончательно получаем

$$t = \frac{\sqrt{3}+1}{2}T.$$

Разбалловка. Понято, что ускорения направлены против начальных скоростей – 1 балл.
Записаны формулы зависимостей координат тел от времени – по 1 баллу за формулу.
Из равенства координат получено уравнение связи параметров – 1 балл.
Записан путь первой частицы – 2 балла.
Записан путь второй частицы – 1 балл.
Из условия $S_1 = 2S_2$ получено еще одно уравнение связи – 1 балл.
Найдено искомое время – 2 балла.

2. (10 баллов) Два тела бросили из одной точки над поверхностью земли с одинаковой по величине скоростью V_0, одно горизонтально, другое под углом α к горизонту. С какой высоты бросили тела, если они упали в одну точку на поверхности земли? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Высота равна $(2V_0^2 ctg^2\alpha)/g$.

Решение. Обозначим через h искомую высоту и введем оси x (горизонтальную) и y (направленную вертикально вверх) с началом в точке броска. Запишем координаты первого (брошенного горизонтально) тела в момент падения на землю t_1 в виде

$$x_1 = V_0 t_1, \qquad -h = -\frac{gt_1^2}{2},$$

откуда получим

$$x_1 = V_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Запишем координаты второго тела в момент t_2 его падения на землю

$$x_2 = V_0\cos\alpha\, t_2, \qquad -h = V_0\sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \tag{1}$$

Во втором уравнении в (1) учтено, что вертикальная компонента начальной скорости должна быть положительной. Действительно, второму телу из-за меньшей горизонтальной скорости нужно большее время полета, чтобы сместиться на то же расстояние в горизонтальном направлении. Из условия $x_1 = x_2$ выразим время t_2 в виде

$$t_2 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

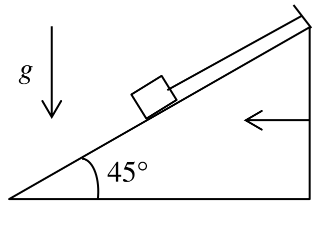
и подставим во второе уравнение в (1). Получим уравнение

$$-h = V_0\,\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{h}{\cos^2\alpha},$$

из которого находим искомую высоту

$$h = \frac{2V_0^2 ctg^2\alpha}{g}.$$

Разбалловка. Записаны формулы для x_1 и y_1 в момент падения – 2 балла.
Записаны формулы для x_2 и y_2 в момент падения – 2 балла.
Понято, что скорость второго тела направлена вверх – 1 балл.
Записано равенство $x_1 = x_2$ – 1 балл.
Составлено уравнение для h – 3 балла.
Найдена искомая высота – 1 балл.



3. (10 баллов) На гладком клине с углом 45° при основании находится кубик, прикрепленный нитью к вершине клина. С каким минимальным ускорением $a_{\min}$ нужно двигать клин в направлении, показанном на рисунке, чтобы нить перестала быть натянутой? Под каким углом к наклонной грани клина будет

направлен вектор ускорения кубика, если ускорение клина будет равно $2a_{\min}$?
Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Клин нужно двигать с $a_{\min} = g$. Ускорение кубика будет направлено
под углом, определяемом формулой $\mathrm{tg}\theta = 2$, т.е. $\theta \approx 63°$.

Решение. При движении клина с ускорением $a_{\min}$ нить уже не натянута, но кубик еще двигается как одно целое с клином. Запишем второй закон Ньютона для кубика в проекции на ось, направленную вниз вдоль наклонной грани клина,

$$ma_{\min}\cos 45° = mg\sin 45°$$

(m – масса кубика), откуда находим, что $a_{\min} = g$.

Если ускорение клина равно $2a_{\min}$, т.е., $2g$, то векторы ускорений кубика и клина различны, однако их проекции на направление, перпендикулярное наклонной грани клина, равны между собой (кубик не отрывается от поверхности клина). Отсюда находим проекцию ускорения кубика на это направление:

$$a_{\perp} = 2g\sin 45° = g\sqrt{2}.$$

Проекцию ускорения кубика на направление, параллельное наклонной грани клина, находим из второго закона Ньютона, записанного в проекции на это направление,

$$ma_{\parallel} = mg\sin 45°,$$

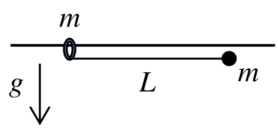
т.е. $a_{\parallel} = g/\sqrt{2}$. Угол θ между вектором ускорения кубика и наклонной гранью клина определяется формулой

$$\mathrm{tg}\theta = a_{\perp}/a_{\parallel} = 2,$$

откуда получаем, что $\theta \approx 63°$.

Разбалловка. Найдено $a_{\min}$ – 3 балла.
Найдено $a_{\perp}$ – 3 балла.
Найдено $a_{\parallel}$ – 2 балла.
Найден искомый угол – 2 балла.

2. (10 баллов) Шарик массы m скреплен нитью длины L с кольцом той же массы, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. Первоначально кольцо неподвижно, а шарик удерживают на уровне спицы так, что нить не провисает (см. рис.). Какую работу совершит над шариком сила натяжения нити к моменту, когда после освобождения шарика нить станет вертикальной? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Работа равна $-\frac{1}{2}mgL$.

Решение. По закону сохранения импульса скорости шарика и кольца будут равными по величине (и противоположными по направлению) в момент достижения шариком нижней точки (принятия нитью вертикального положения). Обозначив скорость в этот момент через V, запишем по закону сохранения механической энергии для системы шарик-кольцо

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = mgL.$$

Работа силы натяжения нити над шариком равна изменению механической энергии шарика, т.е.

$$A = \frac{mV^2}{2} - mgL.$$

Используя первое соотношение, окончательно получаем

$$A = -\frac{1}{2}mgL.$$

Разбалловка. Получено равенство скоростей из закона сохранения импульса – 2 балла.
Записан закон сохранения энергии для системы шарик-кольцо – 2 балла.
Записано выражение для работы через изменение энергии – 4 балла.
Получен ответ – 2 балла.

5. (10 баллов) 2023 резистора, из которых 1011 имеют сопротивление R и 1012 сопротивление $2R$, соединили последовательно в многоугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков многоугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $1517R$ и $1518R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков многоугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 1011 \cdot R + 1012 \cdot 2R = 3035 \cdot R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число резисторов с сопротивлением R нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениях ветвей, т.е. при $R_1 = 506 \cdot 2R + 505 \cdot R = 1517R$ и $R_2 = 506 \cdot 2R + 506 \cdot R = 1518R$.

Разбалловка. Записана формула для мощности в общем виде – 1 балл.
Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 5 баллов.
Найдено сопротивление одного участка – 2 балла.
Найдено сопротивление другого участка – 2 балла.