10 класс

Задача 10.1. Трамплин.

Маленький брусок начинает соскальзывать из точки A (см. рис. 10.1) без начальной скорости. Наклонная поверхность, по которой он движется, образует угол γ с горизонтом, причём $\sin\gamma = 3/5$, а в точке B она резко обрывается вниз. Каков коэффициент трения между бруском и наклонной поверхностью, если брусок падает на поверхность земли под углом 60° к горизонту? Высота относительно земли, на которой находится точка A, в два раза больше высоты, на которой находится точка B. Сопротивлением воздуха пренебречь. Поверхность земли считать горизонтальной.

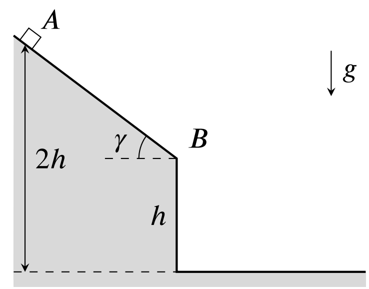

Рис. 10.1.

Ответ: $7/26 \approx 0{,}27$.

Решение: Брусок скользит по наклонной поверхности с ускорением $a = g(\sin\gamma - \mu\cos\gamma)$, где μ — коэффициент трения между бруском и поверхностью. В точке B брусок будет иметь скорость

$$v = \sqrt{2a\cdot h/\sin\gamma} = \sqrt{2gh(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\gamma)},$$

направленную под углом γ относительно горизонта. Дальнейшее движение бруска будет происходить по баллистической траектории. Так как при падении на землю вектор скорости тела образует угол 60° с горизонтом,

$$\mathrm{tg}\,60^\circ = \frac{v\sin\gamma + gt}{v\cos\gamma},$$

где t — время полёта бруска, которое находится из уравнения $h = v\sin\gamma\cdot t + gt^2/2$. Решая это уравнение, получим, что

$$t = \frac{-v\sin\gamma + \sqrt{v^2\sin^2\gamma + 2gh}}{g} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}\,60^\circ = \frac{\sqrt{v^2\sin^2\gamma + 2gh}}{v\cos\gamma} = \sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma + \frac{2gh}{v^2\cos^2\gamma}} =$$

$$= \sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma + \frac{1}{(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\gamma)\cos^2\gamma}}.$$

Отсюда следует, что

$$1 - \mu\,\mathrm{ctg}\,\gamma = \frac{1}{\cos^2\gamma(\mathrm{tg}^2 60^\circ - \mathrm{tg}^2\gamma)} \quad\Rightarrow\quad \mu = \mathrm{tg}\,\gamma - \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\cos^2\gamma(\mathrm{tg}^2 60^\circ - \mathrm{tg}^2\gamma)}.$$

Так как $\sin\gamma = 3/5$, $\cos\gamma = 4/5$ и $\mathrm{tg}\,\gamma = 3/4$. Подставляя эти значения, получим, что

$$\mu = \frac{3}{4} - \frac{3/4}{16/25\cdot(3-9/16)} = \frac{7}{26} \approx 0{,}27.$$

Критерии:

1) Записана формула $a = g(\sin\gamma - \mu\cos\gamma)$ или аналог . . . . 1 балл
2) Записана формула $v = \sqrt{2gh/\sin\gamma}$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записана формула $h = v\sin\gamma\cdot t + gt^2/2$ или аналог . . . . 1 балл
4) Записана формула $\mathrm{tg}\,60^\circ = (v\sin\gamma + gt)/(v\cos\gamma)$ или аналог . . . . 2 балла
5) Найдено верное выражение для t . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение μ . . . . 3 балла

Задача 10.2. В связке.

Два тела, связанные нерастяжимой нитью длины L, расположены так, как показано на рис. 10.2: первое тело лежит на горизонтальной поверхности, а второе — в начале наклонной плоскости с углом наклона, равным α ($\alpha > 45^\circ$). Второму телу в начальный момент времени придают постоянную скорость v, направленную вдоль наклонной плоскости.

1. Определите скорость u первого тела в начальный момент времени.
2. Какое расстояние должно пройти второе тело, чтобы скорость первого стала равна $2u$?

Размерами обоих тел можно пренебречь.

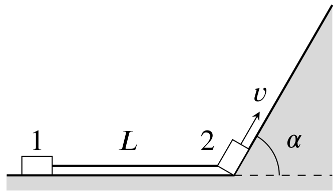

Рис. 10.2.

Ответ: $L \operatorname{ctg} \alpha$.

Решение: Так как нить нерастяжима, проекции скоростей обоих тел на ось, направленную вдоль нити, должны быть равны. В начальный момент это условие примет вид $u = v \cos \alpha$.

Для ответа на второй вопрос задачи предположим, что к описанному моменту второе тело прошло расстояние s, а угол, который образует нить с горизонтом, равен β (см. рис. 10.3). Запишем снова связь между проекциями скоростей на нить:

$$2u \cos \beta = v \cos(\alpha - \beta) \quad \Rightarrow \quad 2v \cos \alpha \cos \beta = v(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\beta + \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Отсюда, используя теорему синусов, получим

$$\frac{s}{\sin \beta} = \frac{L}{\sin \alpha} \quad \Rightarrow \quad s = L \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = L \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = L \operatorname{ctg} \alpha.$$

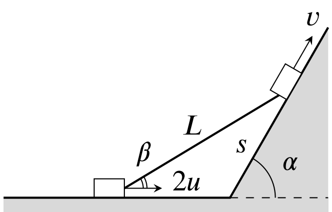

Рис. 10.3.

Критерии:

1) Использован корректный метод нахождения связи между скоростями . . . . 1 балл
2) Найдено, что $u = v \cos \alpha$ . . . . 2 балла
3) Записана формула $2u \cos \beta = v \cos(\alpha - \beta)$ или аналог . . . . 2 балла
4) Найдено, что $\beta = 90^\circ - \alpha$ . . . . 2 балла
5) Предложен корректный метод нахождения s . . . . 1 балл
6) Найдено, что $s = L \operatorname{ctg} \alpha$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Если у участника стоит балл за п. 2, то балл за пункт 1 ставится автоматически.
2) Если участник корректно нашёл, что $s = L \operatorname{ctg} \alpha$, но сделал это неавторским способом, за задачу должен стоять полный балл.

Задача 10.3. Удивительный амперметр.

Как-то раз девочка Аня собрала цепь, состоящую из двух резисторов и источника постоянного напряжения. Подключив параллельно резистору r микроамперметр (см. рис. 10.4а), Аня обнаружила, что он показывает значение $I_1 = 153$ мкА. Затем девочка подключила прибор так, как изображено на рис. 10.4б, и оказалось, что его показание увеличилось в 10 раз: $I_2 = 1530$ мкА. Наконец, Аня подключила прибор, как и положено, последовательно с резисторами (рис. 10.4в). Теперь он стал показывать $I_3 = 170$ мкА. Помогите Ане и определите сопротивление резистора r и напряжение источника, если $R = 6$ кОм.

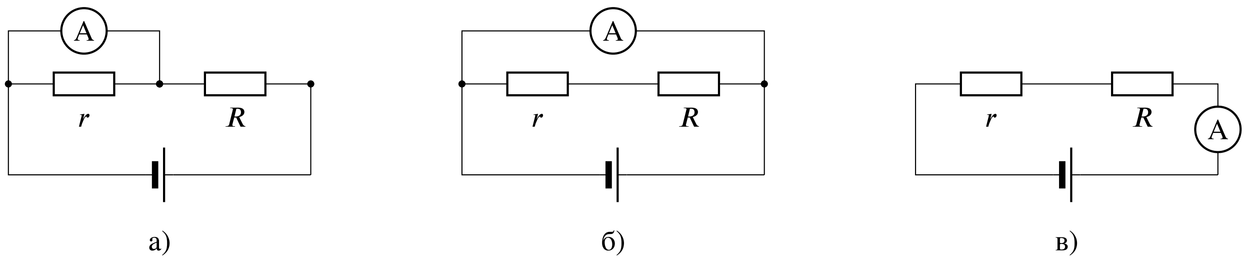

Рис. 10.4.

Ответ: 2 кОм, 1,53 В.

Решение: Пусть R_A — внутреннее сопротивление амперметра, а U_0 — напряжение источника. Из схемы (б) следует, что $U_0 = I_2 R_A$, а из схемы (в) — что $U_0 = I_3(r + R + R_A)$.

Рассмотрим теперь схему (а). Так как амперметр и резистор r соединены параллельно, сила тока через r равна $I_r = I_1 R_A / r$. Отсюда следует, что

$$U_0 = (I_r + I_1)R + I_1 R_A \quad \Rightarrow \quad U_0 = I_1\left(\frac{R_A R}{r} + R + R_A\right).$$

Из уравнений, полученных для схем (б) и (в), получим

$$1530 \text{ мкА} \cdot R_A = 170 \text{ мкА} \cdot (r + R + R_A) \quad \Rightarrow \quad 9R_A = r + R + R_A \quad \Rightarrow \quad r + R = 8R_A.$$

Из уравнений же, полученных для (а) и (б), найдём, что

$$153 \text{ мкА} \cdot \left(\frac{R_A R}{r} + R + R_A\right) = 1530 \text{ мкА} \cdot R_A \quad \Rightarrow \quad \frac{R_A R}{r} + R + R_A = 10R_A \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(r+R)R}{8r} + R = \frac{9(r+R)}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{8} + \frac{R^2}{8r} + R = \frac{9r}{8} + \frac{9R}{8} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{3} = 6 \text{ кОм}.$$

Соответственно, $R_\text{A} = R/6 = 1$ кОм. Подставляя найденные сопротивления, получим, что

$$U_0 = I_2 \cdot \frac{R}{6} = 1530 \text{ мкА} \cdot 1 \text{ кОм} = 1{,}53 \text{ В}.$$

Критерии:

1) Идея о том, что амперметр имеет ненулевое сопротивление . . . . 1 балл
2) Записана формула $U_0 = I_2 R_A$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записана формула $U_0 = I_3(r + R + R_A)$ или аналог . . . . 1 балл
4) Найдена сила тока через r на схеме (а) . . . . 1 балл
5) Записана формула $U_0 = I_1(R_A R/r + R + R_A)$ . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение r . . . . 2 балла
7) Найдено верное значение U_0 . . . . 2 балла

Задача 10.4. Растущая сила.

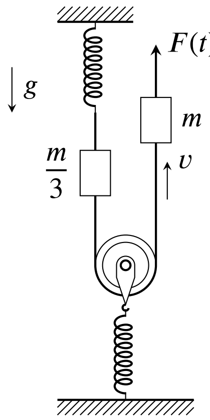

Рис. 10.5.

Вертикальная сила F, приложенная к грузу массой m (см. рис. 10.5), увеличивается со временем так, что оба груза в системе движутся равномерно. Скорость груза массой m направлена вверх и равна v. Жёсткость обеих пружин одинакова и равна k.

1. Определите скорость u, с которой движется груз массой $m/3$.
2. Определите зависимость F от времени t. Считайте, что в момент времени $t = 0$ верхняя пружина растянута на величину x_0.

Трение в блоке отсутствует. Все нити на рисунке являются невесомыми и нерастяжимыми, а пружины и блок — невесомыми.

Ответ: 1) $u = v/5$; 2) $F = kx_0 + 2mg/3 + kvt/5$.

Решение: Пусть T — сила натяжения нити, перекинутой через блок. Так как груз m движется равномерно, $F = mg + T$ в любой момент времени. Сила упругости нижней пружины, соответственно, равна $F_н = 2T$.

Второй груз также движется равномерно, следовательно сила упругости верхней пружины равна $F_в = mg/3 + T$. По условию задачи сила F увеличивается со временем, соответственно, увеличиваются и сила натяжения T, и силы упругости обеих пружин. Это значит, что обе пружины в процессе движения грузов растягиваются, а груз массой $m/3$ движется вниз.

Так как вначале верхняя пружина растянута на x_0, а дальше она изменяет свою длину с постоянной скоростью u,

$$F_в = kx_0 + kut \quad \Rightarrow \quad T = F_в - mg/3 = kx_0 + kut - mg/3.$$

Отсюда следует, что $F_н = 2T = 2kx_0 - 2mg/3 + 2kut$, то есть нижняя пружина растягивается со скоростью $2u$. С той же скоростью движется вверх и блок.

Перейдём в систему отсчёта блока. В ней груз $m/3$ движется вниз со скоростью $3u$, а груз m — вверх со скоростью $v - 2u$. Так как в данной системе отсчёта блок неподвижен,

$$3u = v - 2u \quad \Rightarrow \quad u = v/5.$$

Найдём теперь выражение для силы F:

$$F = mg + T = kx_0 + 2mg/3 + kut = kx_0 + 2mg/3 + kvt/5.$$

Критерии:

1) Записана формула $F = mg + T$ . . . . 0,5 балла
2) Записана формула $F_н = 2T$ . . . . 0,5 балла
3) Записана формула $F_в = mg/3 + T$ . . . . 0,5 балла
4) Обосновано, что скорость блока равна $2u$ . . . . 2,5 балла
5) Найдено, что $u = v/5$ . . . . 3 балла
6) Получено, что $F = kx_0 + 2mg/3 + kut$ . . . . 2 балла
7) Получено, что $F = kx_0 + 2mg/3 + kvt/5$ . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Простого указания на подвижность блока **недостаточно** для обоснования в п.4. В случае отсутствия корректного обоснования, баллы за пп.5-7 не ставить.
2) Если корректно получена формула для F в пункте 7, баллы за п.6 ставить автоматически.

Задача 10.5. Две линзы.

Экспериментатор Иннокентий Иванов, разбирая свой архив, обнаружил рисунок оптической системы, состоящей из двух линз, собирающей и рассеивающей, имеющих общую главную оптическую ось OO' (см. рис. 10.6). Согласно сохранившимся записям, точка S' является действительным изображением точки S в данной оптической системе. Построением, выполненным с помощью циркуля и линейки без делений, определите положение фокусов обеих линз. Все сделанные построения сопроводите необходимыми объяснениями.

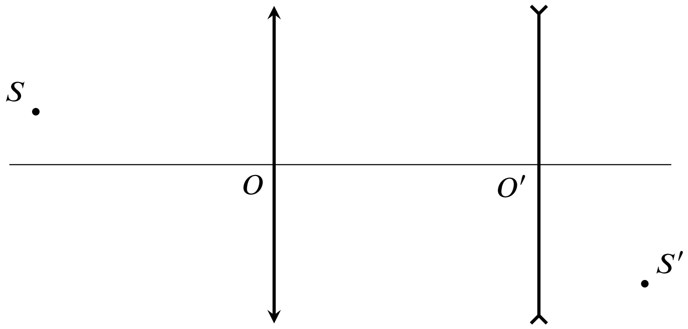

Рис. 10.6.

Ответ: См. рис. 10.7.

Решение: Пусть S'' — изображение точки S в собирающей линзе. Тогда изображение точки S'' в рассеивающей линзе — точка S'. Так как источник и соответствующее ему изображение лежат на прямой, проходящей через оптический центр линзы, сделаем необходимое построение: проведём прямые SO и $S'O'$. Точка пересечения этих прямых — точка S''.

Для нахождения фокусов собирающей линзы построим луч, идущий из точки S параллельно главной оптической оси. После преломления в линзе он пойдёт в точку S''. Получившаяся при этом точка пересечения луча после линзы и главной оптической оси — фокус собирающей линзы. Второй фокус откладываем симметрично.

Чтобы найти фокусы рассеивающей линзы, действуем аналогично, только с главной оптической осью будет пересекаться продолжение преломлённого луча. В результате получим точку F'. Второй фокус откладываем симметрично с другой стороны рассеивающей линзы.

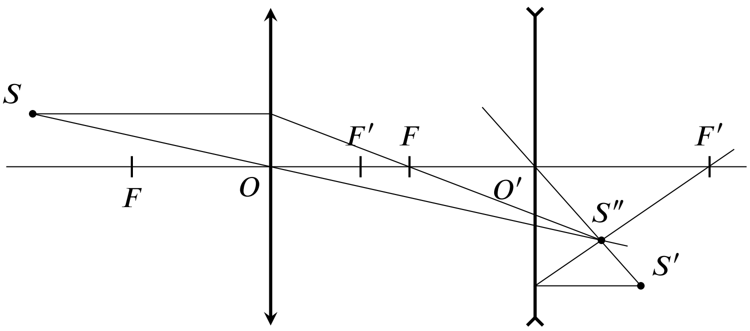

Рис. 10.7.

Критерии:

1) Описана методика нахождения точки S'' . . . . 2 балла
2) Обоснование методики нахождения S'' . . . . 2 балла
3) Сделано соответствующее построение для точки S'' . . . . 1 балл
4) Описана методика нахождения фокусов собирающей линзы . . . . 1,5 балла
5) Описана методика нахождения фокусов рассеивающей линзы . . . . 1,5 балла
6) Сделано построение фокусов собирающей линзы . . . . 1 балл
7) Сделано построение фокусов собирающей линзы . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Если у участника есть только чертёж без описания, оцениваются только пп.3,6,7.

2) Если построен только один фокус линзы (из двух), за соответствующий пункт ставить 0,5 балла.

Максимально возможный балл в 10 классе 50