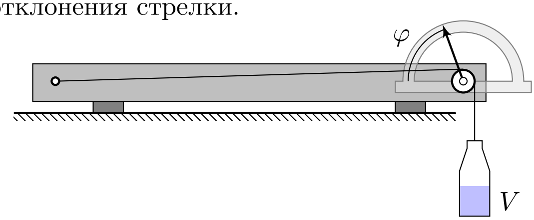
## Задача №10-Е1. Тепловое сопротивление

Результаты приведены для эксперимента с авторской установкой, которая отличалась массой пустой бутылки и маркой проволоки.

Подвесим пустую бутылку к измерительному стенду с помощью куска проволоки большей длины и выставим стрелку в некоторое положение (см. рисунок). Обратим внимание, что изначально куски проволоки скручены в витки, и вследствие этого могут проявлять нелинейность растяжения по нагрузке. Проверим, что колесико свободно вращается, не касаясь транспортира и головки винта. Начнём наливать в бутылку воду с помощью шприца порциями по 20 мл, измеряя при этом угол $\varphi$ отклонения стрелки.




| $\varphi$, ° | $V$, мл | $F$, Н | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 35 | 0 | 0,18 | 0,00000 |
| 37 | 20 | 0,37 | 0,00013 |
| 37 | 40 | 0,57 | 0,00013 |
| 39 | 60 | 0,76 | 0,00025 |
| 40 | 80 | 0,96 | 0,00031 |
| 42 | 100 | 1,16 | 0,00044 |
| 43 | 120 | 1,35 | 0,00050 |
| 45 | 140 | 1,55 | 0,00063 |
| 46 | 160 | 1,74 | 0,00069 |
| 48 | 180 | 1,94 | 0,00082 |
| 50 | 200 | 2,14 | 0,00094 |
| 51 | 220 | 2,33 | 0,00101 |
| 53 | 240 | 2,53 | 0,00113 |
| 54 | 260 | 2,72 | 0,00120 |
| 56 | 280 | 2,92 | 0,00132 |

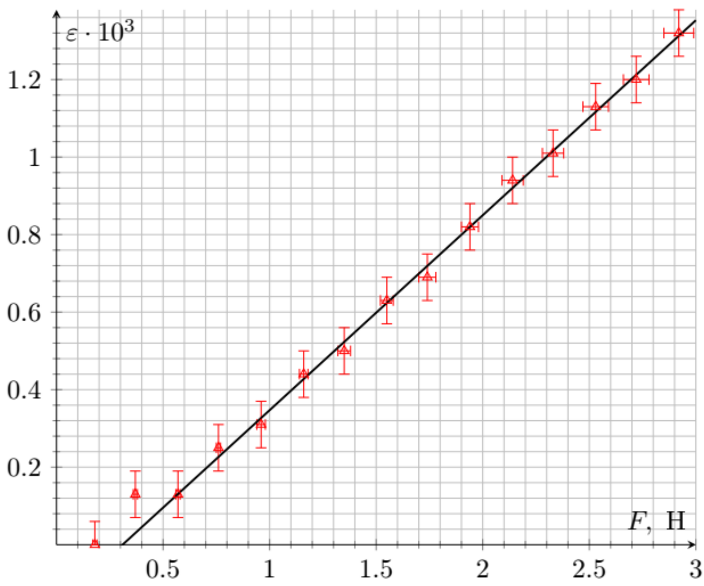
В представленной таблице расчёт растягивающей силы $F$ и относительного удлинения $\varepsilon$ произведён по формулам

$$F = \rho V g + m_0 g,$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{(\varphi - \varphi_0) r}{L},$$

где $\varphi_0$ – начальный угол отклонения стрелки. Построенный график $\varepsilon$ от $F$ имеет линейный вид в пределах погрешности.

Погрешность определения силы составляет $\Delta F = (0{,}5\text{ мл}/20\text{ мл}) \cdot F$, погрешность определения относительного удлинения составляет $\Delta\varepsilon = (\pi/180^\circ) \cdot 1^\circ \cdot r/L = 6 \cdot 10^{-5}$.

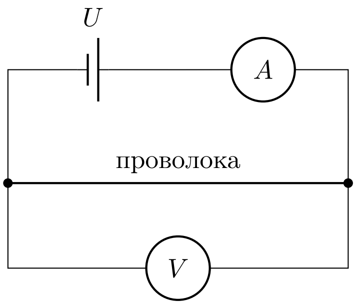



Зависимость $\varepsilon$ от $F$

Наблюдаемый сдвиг по оси $F$ может быть обусловлен наличием силы трения между колесиком и осью. Угловой коэффициент сглаживающей прямой $k_1 = 1/ES = (0{,}50 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-3}$ Н$^{-1}$, где $S = \pi d^2/4$, тогда модуль Юнга $E = 1/k_1 S = (113 \pm 7)$ ГПа. В работе используется неизолированная медная проволока. Табличное значение модуля Юнга для меди $E_{\text{Cu}} = 118$ ГПа.

$$E = (113 \pm 7) \text{ ГПа}.$$

Подвесим к свободному концу куска длинной проволоки пустую бутылку и затем нальём небольшое количество воды ($\approx 100$ мл). Это надо для того, чтобы преодолеть зону застоя, связанную с наличием трения в оси колёсика. Соберем электрическую цепь, схема которой изображена на рисунке.




Подключим кусок проволоки, амперметр и источник последовательно. Параллельно с куском проволоки подключим мультиметр в режиме вольтметра.

Возможные хорошие варианты:

- «Крокодилы» проводов подключаем к проводу вблизи болта и проводу около колесика на вертикальном участке проволоки.
- «Крокодилы» проводов подключаем к небольшим свободным концам проволоки в местах крепления к бутылке и болту. Значения напряжений при этом пересчитываем.

Первое измерение проведем при температуре проволоки близкой к комнатной (при малых значениях сил токов). При этом используем мультиметр в режиме «200 mA».

Посмотрим, как меняется длина медной проволоки при пропускании через неё «амперных токов». Для этого переведём амперметр в режим «10 А». Далее, увеличивая напряжение на источнике, измеряем угол поворота стрелки $\varphi$, силу тока $I$ на амперметре и напряжение $U$ на вольтметре в режиме «нагревания» (увеличения силы тока) и «остывания» (уменьшения силы тока).

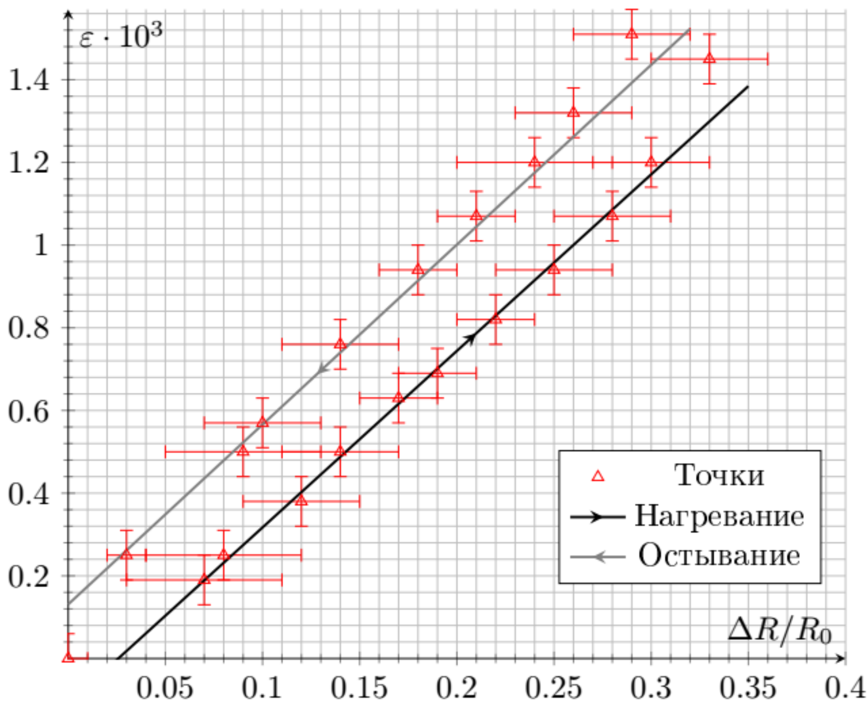
Последнее измерение проводим опять при температуре проволоки близкой к комнатной. При этом используем мультиметр в режиме «200 mA».

| $\varphi$, ° | $I$, $A$ | $U$, В | $\Delta R/R_0$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 36 | 0,0824 | 0,0858 | 0,00 | 0,00000 |
| **Нагревание** | | | | |
| 39 | 0,75 | 0,837 | 0,07 | 0,00019 |
| 40 | 0,86 | 0,965 | 0,08 | 0,00025 |
| 42 | 1,07 | 1,252 | 0,12 | 0,00038 |
| 44 | 1,21 | 1,438 | 0,14 | 0,00050 |
| 46 | 1,35 | 1,649 | 0,17 | 0,00063 |
| 47 | 1,45 | 1,803 | 0,19 | 0,00069 |
| 49 | 1,56 | 1,984 | 0,22 | 0,00082 |
| 51 | 1,66 | 2,16 | 0,25 | 0,00094 |
| 53 | 1,73 | 2,30 | 0,28 | 0,00107 |
| 55 | 1,83 | 2,48 | 0,30 | 0,00120 |
| 60 | 2,02 | 2,71 | 0,29 | 0,00151 |
| **Остывание** | | | | |
| 59 | 1,93 | 2,67 | 0,33 | 0,00145 |
| 57 | 1,76 | 2,31 | 0,26 | 0,00132 |
| 55 | 1,62 | 2,09 | 0,24 | 0,00120 |
| 53 | 1,51 | 1,901 | 0,21 | 0,00107 |
| 51 | 1,37 | 1,68 | 0,18 | 0,00094 |
| 48 | 1,18 | 1,401 | 0,14 | 0,00076 |
| 45 | 0,99 | 1,132 | 0,10 | 0,00057 |
| 44 | 0,82 | 0,927 | 0,09 | 0,00050 |
| 40 | 0,0442 | 0,0473 | 0,03 | 0,00025 |

Исследуемая температурная зависимость сопротивления определяется формулой $R = R_0(1+\alpha\Delta t)$, поэтому $\Delta R/R_0 = (R-R_0)/R_0 = \alpha\Delta t$, где $R_0$ – начальное сопротивление. Такой же вид и у зависимости относительного удлинения проволоки от температуры: $\varepsilon = \Delta l/l = \beta\Delta t$. А значит график зависимости $\varepsilon$ от $\Delta R/R_0$ будет линейным.

Сопротивление $R$ будем рассчитывать по формуле $R = U/I$, а относительное удлинение $\varepsilon$ – по формуле $\varepsilon = (\pi/180°) \cdot (\varphi - \varphi_0)r/L$.

Погрешность относительного удлинения находим по формуле $\Delta\varepsilon = (\pi/180°) \cdot 1° \cdot r/L = 6 \cdot 10^{-5}$, погрешность $\Delta R_0 = (\Delta I_0/I_0 + \Delta U_0/U_0)\, R_0 = 0{,}007$ Ом. Погрешность для $\Delta R$ находим аналогично, в результате чего погрешность значения $R - R_0$ оказывается порядка 0,04 Ом. Основной вклад в погрешность данной величины дает погрешность амперметра в режиме «10 А».



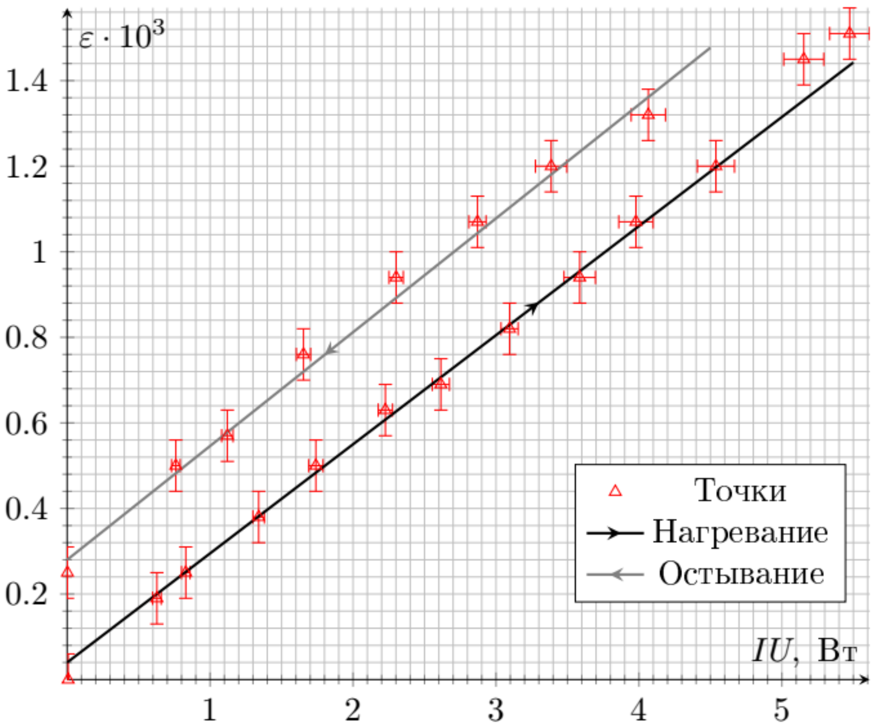

Зависимость $\varepsilon$ от $\Delta R/R_0$

На графике приведены линейные участки снятых зависимостей. Отчётливо виден гистерезис, связанный с изменением направления силы трения в колесике при смене режима «нагревания» на режим «остывания». При этом угловые коэффициенты $k_{\text{наг}} = (4{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$, $k_{\text{ост}} = (4{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$ совпадают в пределах погрешности. В рамках используемой модели угловой коэффициент графика должен быть равен $\beta/\alpha$. Для его нахождения усредним $k_{\text{наг}}$ и $k_{\text{ост}}$:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{k_{\text{наг}} + k_{\text{ост}}}{2} = (4{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}.$$

Чем больше масса подвешенного груза, тем сильнее проявляется гистерезис, и при правильном выборе объема воды налитого в бутылку ($V > 60$ мл) он всегда проявляется. При этом $\frac{k_{\text{наг}}+k_{\text{ост}}}{2}$ остается постоянным.

Возможно выбрать другие координаты, линеаризующие снятую зависимость. Считая мощность теплопотерь $W_{\text{пот}}$ пропорциональной разности температур $\Delta t$ между проволокой и внешней средой: $W_{\text{пот}} = k_{\text{пот}}\Delta t$, можем записать уравнение теплового баланса $IU = W_{\text{пот}} = k_{\text{пот}}\Delta t$. Таким образом, зависимость относительного удлинения $\varepsilon$ от $IU$ должна быть линейной.



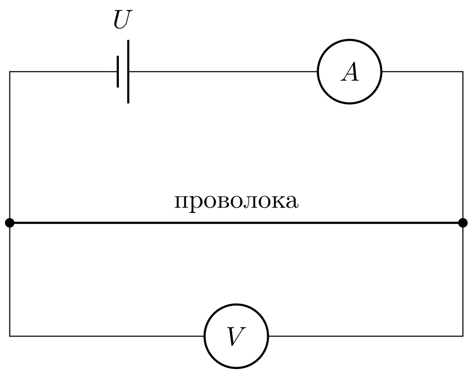

Зависимость $\varepsilon$ от $IU$

На этом графике также отчётливо виден гистерезис, связанный с изменением направления силы трения в колесике при смене режима «нагревания» на режим «остывания». Угловые коэффициенты тоже совпадают в пределах погрешности.

Для определения коэффициента $\beta$ нужно использовать соотношение $\frac{\beta}{\alpha}$, найденное описанным выше методом. Независимо найдем температурный коэффициент сопротивления $\alpha$.

Исследуем, как зависит сопротивление медной проволоки от температуры. Для этого поместим короткий кусок проволоки в горячую воду, температуру которой измерим термометром. Подадим на проволоку небольшое напряжение от источника порядка 200 мВ. Далее снимем значения силы тока в цепи и напряжения на концах куска проволоки от температуры воды.

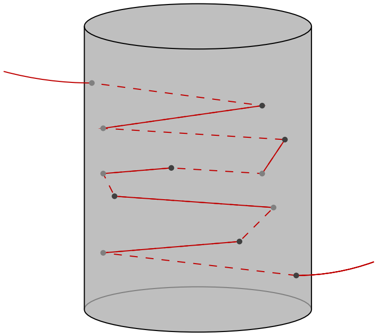
Для определения сопротивления через проволоку пропустим «небольшой» ток (в диапазоне до 200 мА). Силу тока измерим «миллиамперметром», а напряжение на концах проволоки – «милливольтметром». Обратим внимание, что сопротивление проволоки при длине $l = 1$ м составляет порядка 1 Ом, в связи с чем амперметр нельзя считать идеальным.




Выданная проволока неизолированная, так что при помещении её в воду важно, чтобы не было касания (т.е. электрического контакта) друг с другом витков проволоки. Если допустить контакты между витками проволоки, то они могут смещаться при наливании воды, меняя сопротивление проволоки.

Этого можно добиться, например, сделав в маленьком стаканчике отверстия канцелярской кнопкой и пропустив через них проволоку. Обратим внимание, что сопротивление проволоки не меняется при помещении её в воду комнатной температуры.

| $t, ^\circ\mathrm{C}$ | $U$, мВ | $I$, мА | $\Delta R/R_0$ |
|---|---|---|---|
| 33,7 | 46,5 | 45,2 | 0 ,000 |
| **Остывание** | | | |
| 87,0 | 51,2 | 41,9 | 0,188 |
| 85,0 | 51,1 | 42,0 | 0,183 |
| 83,0 | 51,1 | 42,1 | 0,180 |
| 81,0 | 50,8 | 42,3 | 0,167 |
| 79,0 | 50,6 | 42,4 | 0,160 |
| 77,0 | 50,5 | 42,5 | 0,155 |
| 75,0 | 50,3 | 42,6 | 0,148 |
| 73,0 | 50,0 | 42,8 | 0,136 |
| 71,0 | 49,8 | 42,9 | 0,128 |
| 69,0 | 49,7 | 43,0 | 0,124 |
| 67,0 | 49,6 | 43,2 | 0,116 |
| 65,0 | 49,4 | 43,3 | 0,109 |
| 63,0 | 49,2 | 43,4 | 0,102 |
| 61,0 | 49,1 | 43,5 | 0,097 |
| 59,0 | 48,9 | 43,7 | 0,088 |
| 58,0 | 48,8 | 43,7 | 0,085 |
| 57,0 | 48,6 | 43,7 | 0,081 |
| 56,0 | 48,6 | 43,8 | 0,079 |
| 55,0 | 48,4 | 43,9 | 0,072 |
| 54,0 | 48,4 | 43,9 | 0,072 |
| 53,0 | 48,3 | 43,9 | 0,069 |
| 52,0 | 48,2 | 44,0 | 0,065 |
| 51,0 | 48,0 | 44,0 | 0,060 |
| 41,5 | 47,0 | 44,6 | 0,024 |



Схематичный вид стакана с проволокой

Полученную систему опустим в большой стакан с горячей водой. Не меняя значение напряжения на источнике, снимем значения силы тока $I$ и напряжения $U$ на концах куска проволоки при разных температурах воды $t$. Для расчёта $R_0$ используем данные, полученные при практически комнатной температуре.

Как уже говорилось ранее, температурная зависимость сопротивления определяется формулой $R = R_0(1+\alpha\Delta t)$, поэтому в координатах $\Delta R/R_0$ от $t$ график должен быть линейным.

Погрешность $t$ составляет 0,3°C, погрешность $\Delta R/R_0$ определяется аналогично прошлому пункту. Отметим, что основной вклад в погрешность вносит погрешность термометра.

Пока производим расчёты, вода успевает остыть. Это даёт возможность снять две дополнительных точки при более низких температурах.

С помощью графика, который получился линейным, определяем угловой коэффициент $k_4 = (3{,}60 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Этот угловой коэффициент совпадает с температурным коэффициентом сопротивления $\alpha = k_4 = (3{,}60 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Табличное значение температурного коэффициента сопротивления для меди: $\alpha_{\mathrm{Cu}} = 3{,}93 \cdot 10^{-3}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

С учётом значения $\beta/\alpha = (4{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$, найденного в предыдущем пункте, вычисляем $\beta = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Табличное значение температурного коэффициента расширения для меди $\beta_{\mathrm{Cu}} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

$$\beta = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}.$$

*Примечание:* Температурная зависимость сопротивления определяется не только зависимостью ее удельного сопротивления $\Delta\rho/\rho = \gamma\Delta t$ от температуры но и изменением ее геометрических размеров: $\Delta l/l = \beta\Delta t$, $\Delta S/S = \Delta(r^2)/r^2 = 2r\Delta r/r^2 = 2\beta\Delta t$, так как они все вместе входят в конечную формулу $R = \rho l/S$.

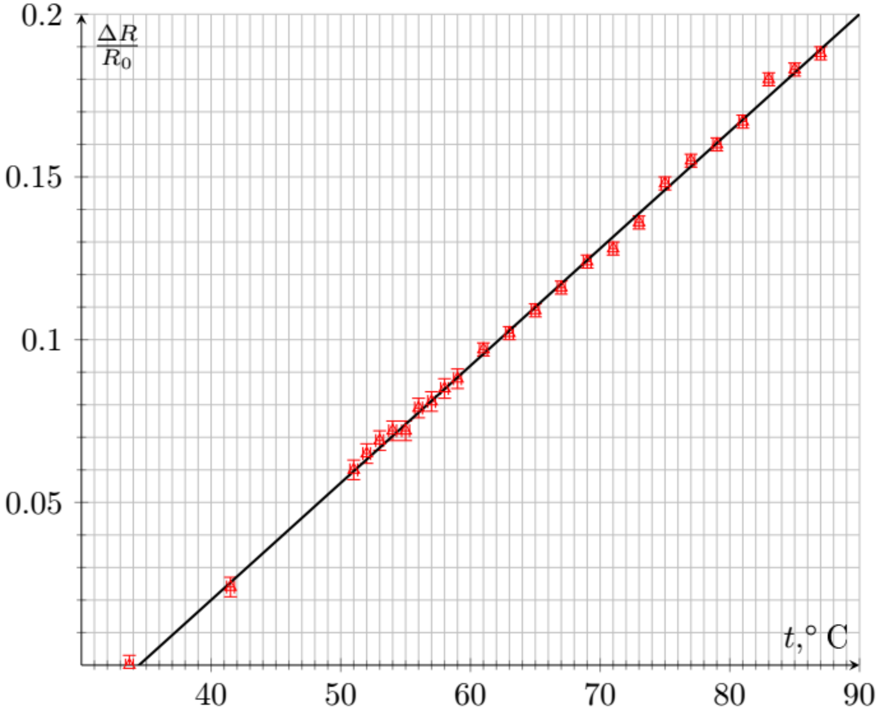



График $\Delta R/R_0$ от $T$

Итого:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta S}{S} = (\gamma - \beta)\Delta t,$$

но в нашем случае $\beta \ll \gamma$, поэтому $\alpha \simeq \gamma$. Учет этих факторов никаким образом не влияет на представленное решение задачи.