

10 класс

Задача №10-Е1. Универсальный измеритель

Изготовим из трубочки и пластилина устройство («ареометр») для измерения массы. Для этого на один из концов прикрепим шарик из пластилина. Важно добиться герметичного соединения пластилина с трубочкой, чтобы через пластилиновую пробку не подтекала вода. Основным параметром при измерении массы небольших предметов, помещённых внутрь ареометра, является изменение глубины его погружения в воду Δh . Это изменение удобно определить по положению верхнего конца трубочки (торчащего из воды). Для этого можно, например, приклеить полоску миллиметровой бумаги на сосуд с водой.

Масса предмета m при этом рассчитывается через изменение силы Архимеда

$$m = \rho S \Delta h,$$

где ρ – плотность воды, $S = \frac{\pi d_0^2}{4}$ – площадь сечения трубочки, d_0 – её внешний диаметр. Измерим диаметр трубочки, обмотав её несколькими витками нитки. В нашем случае длина 10 витков нитки составила $L = 150 \pm 2$ мм. Соответственно, $d_0 = \frac{L}{10\pi} = 4,8 \pm 0,05$ мм. При этом $S = \frac{\pi d_0^2}{4} = 17,3 \pm 0,4$ мм². Относительная погрешность $\varepsilon_S \approx 0,02$.

Помещаем пульки в трубочку до тех пор, пока ареометр почти полностью не погрузится в воду. При длине трубочки ≈ 18 см и диаметре $d_0 \approx 4,8$ мм достаточно 7 шариков, чтобы трубка почти полностью погрузилась в воду (при массе пластилина примерно 1,5 г). С помощью миллиметровки измеряем расстояние от верхнего конца трубочки до поверхности воды с пулями (при 6 пулях, помещённых в ареометр). Начнём вынимать шарики из ареометра по одной штуке, наблюдая за устойчивостью ареометра. В какой-то момент времени он потеряет устойчивость, начинает опрокидываться. Оставим в нем **минимальное** число пулек, при котором ареометр все ещё устойчиво плавает (при длине трубочки ≈ 18 см, диаметре $d_0 \approx 4,8$ мм и массе пластилина 1,5 г минимальное число шариков равно 2). Определим расстояние от верхнего конца ареометра до поверхности воды $l_2 \approx 9,4$ см. Тогда

$$N \cdot mg = \rho_{\text{в}} g (l_2 - l_1) \pi \frac{d_0^2}{4},$$

где N – количество шариков, которые мы вытащили из ареометра. Отсюда масса



Рис. 1. Внешний вид «устройства»

одной пульки

$$m = \frac{\rho_B \pi d_0^2}{4N} (l_2 - l_1) \approx 0,33 \text{ г.}$$

Оценим погрешность определения массы пульки. Будем считать, что величина $\Delta l = l_2 - l_1$ определяется с погрешностью ± 2 мм, с относительной погрешностью $\varepsilon_{\Delta l} \approx 0,03$. Тогда относительная погрешность определения массы пулек составляет $\varepsilon_m \approx \varepsilon_{\Delta l} + \varepsilon_S \approx 0,05$. Таким образом, масса одной пульки $m = 0,33 \pm 0,02$ г. Контрольное измерение массы пульки с помощью электронных весов даёт $m \approx 0,34$ г. *Примечание.* В данном методе используется небольшой кусочек пластилина, равновесие пустого ареометра обеспечивается шариками, которые всегда находятся внутри ареометра. Это же равновесие можно обеспечить, используя соответствующее количество пластилина.

Внутри трубочки помещаем медный провод. Массу пластилина при необходимости «регулируем», подбираем такой, чтобы ареометр почти полностью погружалось вместе с медным проводом. Масса провода слишком большая, и устойчиво плавающий без провода «пустой» ареометр тонет, если опустить в него медный провод.

С помощью миллиметровки измеряем глубину погружения трубочки (высоту конца, который торчит из воды) с проводом h_m . Повторяем измерения для алюминиевого проводника (рис. 2а и 2б), получим глубину погружения h_a . Результаты измерений:

$$h_m = 90 \pm 1,5 \text{ мм}; \quad h_a = 22 \pm 1,5 \text{ мм}; \quad \Delta h = h_m - h_a = 68 \pm 3 \text{ мм},$$

где Δh — разность высот, на которую поднимается ареометр при замене медного на алюминиевый проводник.

Измеряем длину проводов $l = 77 \pm 1$ мм. Разница масс медного и алюминиевого проводов, определённая таким способом составляет

$$\Delta m = m_m - m_a = \rho S (h_m - h_a) = \rho S \Delta h \approx 1,2 \text{ г.}$$

При этом относительная погрешность $\varepsilon_{\Delta m} \approx \varepsilon_S + \varepsilon_{\Delta h} \approx 0,02 + 0,04 = 0,06$, абсолютная погрешность $\Delta_{\Delta m} \approx 0,07$ г.

Разница в массах обусловлена разностью плотностей меди и алюминия

$$\Delta m = (\rho_m - \rho_a) \frac{\pi d^2}{4} l.$$

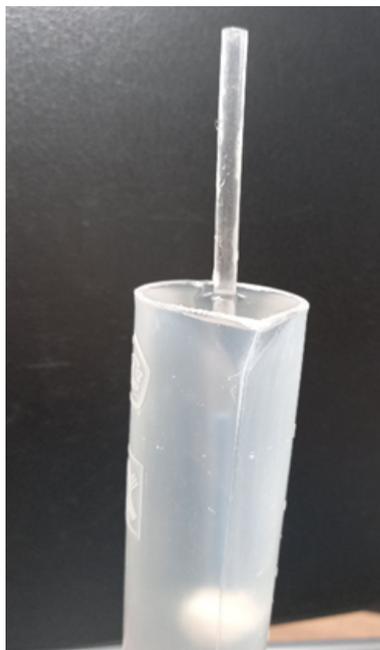
Отсюда $d = \sqrt{\frac{4\Delta m}{\pi(\rho_m - \rho_a)l}} \approx 1,8$ мм. Относительная погрешность определения d :

$$\varepsilon_d = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\Delta m} + \varepsilon_l) \approx 0,04$$

Окончательно $d = 1,8 \pm 0,07$ мм. При заявленном производителем сечении жилы $2,5 \text{ мм}^2$ диаметр ее должен составлять 1,78 мм.



(а) с медной



(b) с алюминиевой

Рис. 2. Ареометры с проволокой

10 класс

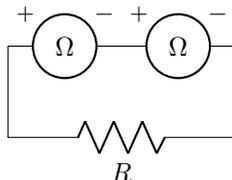
Задача №10-Е2. Два мультиметра

Внимание! Приведённые ниже значения получены на авторской установке и могут отличаться от значений, полученных жюри!

Переключим один из приборов в режим вольтметра (режим "200m"), другой — в режим омметра (режим «2000k») и соединим их друг с другом. В этом случае вольтметр покажет напряжение $U_V = 129,8$ мВ, а омметр измерит сопротивление вольтметра $R_V = 996$ кОм.

Способ 1. Одним омметром определить сопротивление R невозможно, так как прибор зашкаливает. Чтобы измерить R соединим последовательно оба мультиметра в режиме омметра (диапазон «2000k») и этот резистор (см. рис.).

Сумма показаний омметров, $R_{\Omega 1}$ и $R_{\Omega 2}$, равна искомому сопротивлению резистора



$$R = R_{\Omega 1} + R_{\Omega 2} = 1507 \text{ кОм} + 1510 \text{ кОм} = 3017 \text{ кОм} \approx 3020 \text{ кОм}.$$

Погрешность определения суммы можно оценить как 6 кОм, то есть 0,2%. Если же показания приборов «скачут» в процессе измерения, то к полученной оценке необходимо добавить сумму амплитуд этих колебаний на обоих приборах. Так, например, при колебаниях показаний каждого прибора в пределах ± 5 кОм, итоговая погрешность данного метода будет равна 16 кОм или 0,53%.

Способ 2. Соединим резистор R и вольтметр параллельно и подключим к ним омметр. Он покажет $R' = 749$ кОм. Отсюда найдём R :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} = \frac{1}{R'} \Rightarrow R = \frac{R_V R'}{R_V - R'} = \frac{996 \cdot 749}{247} \text{ кОм} = 3020 \text{ кОм}.$$

Относительная погрешность такого способа:

$$\varepsilon_R = \varepsilon_{R'} + \varepsilon_{R_V} + \frac{\Delta R_V + \Delta R'}{R_V - R'} = \frac{3}{749} + \frac{3}{996} + \frac{6}{247} \approx 3,1\%.$$

Рассмотрим последовательное соединение омметра, вольтметра и резистора R . Омметр находится в режиме «2000k», вольтметр — в режиме «200m». Омметр при этом будет зашкаливать, но вольтметр покажет значение напряжения (по модулю) $U'_V = 51,6$ мВ (знак минус может возникнуть из-за полярности подключения).

Используя принципиальную схему омметра, получим, что собранная цепь представляет собой последовательное соединение источника и трёх резисторов: r , R и R_V . Напряжение на R_V будет равно

$$U'_V = \frac{U_0 R_V}{r + R + R_V}.$$

Аналогично, если омметр и вольтметр подключены напрямую (без резистора R) напряжение на вольтметре составит

$$U_V = \frac{U_0 R_V}{r + R_V}.$$

Отсюда найдём, что

$$\frac{1}{U'_V} - \frac{1}{U_V} = \frac{R}{U_0 R_V} \Rightarrow U_0 = \frac{U_V R / R_V}{U_V / U'_V - 1} = \frac{393,2 \text{ мВ}}{129,8/51,6 - 1} \approx 259 \text{ мВ}.$$

Сопротивление r , соответственно, равно

$$r = \frac{U_0 R_V}{U_V} - R_V = \frac{R}{U_V / U'_V - 1} - R_V = \frac{3017 \text{ кОм}}{129,8/51,6 - 1} - 996 \text{ кОм} \approx 995 \text{ кОм}.$$

Погрешность значения сопротивления R определена выше, в пункте 1. Для оценки погрешностей U_0 и r найдём относительную погрешность значения выражения $k = U_V / U'_V - 1$:

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta(U_V / U'_V)}{k} = \frac{U_V / U'_V \cdot (\varepsilon_{U_V} + \varepsilon_{U'_V})}{k} = \frac{2,516 \cdot (0,3/129,8 + 0,3/51,6)}{1,516} \approx 1,3\%.$$

Соответственно,

$$\varepsilon_{U_0} = \varepsilon_{U_V} + \varepsilon_R + \varepsilon_{R_V} + \varepsilon_k = 0,3/129,8 + 0,53\% + 3/996 + 1,3\% = 2,4\% \Rightarrow \Delta U_0 \approx 6 \text{ мВ}.$$

$$\Delta r = \frac{R}{U_V / U'_V - 1} \cdot (\varepsilon_R + \varepsilon_k) + \Delta R_V = 57 \text{ кОм}.$$

Примечание: В данных расчётах используется значение $\varepsilon_R = 0,53\%$, приведённое в пункте 1 (способ 1). В зависимости от метода определения R , используемого оборудования и метода оценки погрешностей значения могут отличаться от авторских.

Шифр

 Σ **10-Е1. Универсальный измеритель**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Предложен метод измерений с помощью ареометра. Баллы за пункт ставятся при условии вывода формулы, связывающей изменение глубины погружения с добавочной массой, либо при наличии вычислений на основе экспериментальных данных в том или ином виде использующих эту формулу.	3.0		
1.2	Экспериментально определён диаметр трубки (не более 1 балла) Использован метод измерения с помощью нескольких витков нити или метод прокатывания. — Прямое измерение диаметра с помощью миллиметровки	1.0 0.5		
1.3	Определена длина проводов	0.5		
1.4	Записаны уравнения для изменения глубины погружения трубки с медным и алюминиевым проводниками или эквивалентные (по 1 баллу за каждое)	2 уравн по 1.0		
1.5	Получена итоговая формула для определения диаметра жилы проводов	1.5		
1.6	Экспериментально определены значения h_m и h_a для каждого из проводников (по 0,5 балла за алюминиевый и медный провода).	2 знач по 0.5		
1.7	Получена величина $\Delta h = h_m - h_a$	1.0		
1.8	Получено корректное значение диаметра жилы в диапазоне $d \pm 15\%$ – 3 балла $d \pm 30\%$ – 1,5 балла Иначе 0 баллов	2 знач по 1.5		
1.9	Оценка погрешностей измерения диаметра	1.0		
1.10	Записано уравнение для изменения глубины погружения ареометра при добавлении пульек	1.0		
1.11	Экспериментально определено изменение глубины погружения ареометра с пулями. Число пульек $N \geq 3$ – 2 балла. Число пульек $N < 3$ – 1 балл	2 знач по 1.0		
1.12	Получено значение массы пульки в диапазоне $m_0 \pm 15\%$ – 2 балла $m_0 \pm 30\%$ – 1 балл Иначе 0 баллов	2 знач по 1.0		

1.13	Оценка погрешности массы пульки	1.0		
------	---------------------------------	-----	--	--

Шифр

 Σ

10-Е2. Два мультиметра

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Описана корректная методика измерения R	2.0		
1.2	<p>Получено значение R (максимальная оценка за данный пункт — 2 балла).</p> <p><i>Примечание 1:</i> При оценивании необходимо выбрать один из трёх вариантов, указанных ниже.</p> <p><i>Примечание 2:</i> Если нет баллов за методику (предыдущий пункт), данный пункт не оценивается.</p> <p>— $R \in [2850; 3150]$ кОм 2.0</p> <p>— $R \in [2700; 3300]$ кОм, но $R \notin [2850; 3150]$ кОм 1.0</p> <p>— $R \notin [2700; 3300]$ кОм или результат получен некорректным способом 0.0</p>	2.0		
2.1	Измерено сопротивление вольтметра $R_V = 1000$ кОм (допустимое отклонение ± 10 кОм)	1.0		
2.2	<p>Вольтметр используется в режиме «200m» (200 мВ).</p> <p><i>Примечание:</i> Явного указания на это не требуется, если по экспериментальным значениям напряжений видно, что измерения происходили в нужном диапазоне (численные значения должны быть даны с точностью до десятых долей мВ).</p>	1.0		
2.3	Записано показание вольтметра при подключении к омметру	1.0		
2.4	Записано показание вольтметра при подключении к омметру последовательно/параллельно с R .	1.5		
2.5	Записаны уравнения, содержащие U_0 , r и измеренные величины, из которых можно найти U_0 и r	3.0		
2.6	Получена верная формула для расчета U_0 , содержащая измеренные величины	1.5		
2.7	Получена верная формула для расчета r , содержащая измеренные величины	1.5		
2.8	<p>Найдено верное числовое значение U_0 (максимальная оценка за данный пункт — 2 балла).</p> <p><i>Примечание:</i> При оценивании необходимо выбрать один из трёх вариантов, указанных ниже.</p>	2.0		

	<ul style="list-style-type: none"> — Найденное значение U_0 отличается от среднего значения, определённого жюри, не более, чем на 5% 	2.0		
	<ul style="list-style-type: none"> — Найденное значение U_0 отличается от среднего значения, определённого жюри, более, чем на 5%, но не более, чем на 10% 	1.0		
	<ul style="list-style-type: none"> — Найденное значение U_0 отличается от среднего значения, определённого жюри, более, чем на 10%; значение U_0 не найдено или найдено некорректным способом 	0.0		
2.9	<p>Найдено верное числовое значение r (максимальная оценка за данный пункт — 2 балла).</p> <p><i>Примечание 1:</i> При оценивании необходимо выбрать один из трёх вариантов, указанных ниже.</p> <p><i>Примечание 2:</i> Утверждение, что $r = R_V$, не являющееся при этом результатом обработки измерений, некорректно и оценивается в 0 баллов.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Найденное значение r отличается от среднего значения, определённого жюри, не более, чем на 10% 	2.0		
	<ul style="list-style-type: none"> — Найденное значение r отличается от среднего значения, определённого жюри, более, чем на 10%, но не более, чем на 20% 	2.0		
	<ul style="list-style-type: none"> — Найденное значение r отличается от среднего значения, определённого жюри, более, чем на 20%; значение r не найдено или найдено некорректным способом 	1.0		
	<ul style="list-style-type: none"> — Найденное значение r отличается от среднего значения, определённого жюри, более, чем на 20%; значение r не найдено или найдено некорректным способом 	0.0		
3.1	<p>Корректная оценка погрешности для R.</p> <p><i>Примечание:</i> Если нет баллов за значение R, данный пункт не оценивается.</p>	0.5		
3.2	<p>Корректная оценка погрешности для U_0.</p> <p><i>Примечание:</i> Если нет баллов за значение U_0, данный пункт не оценивается.</p>	0.5		
3.3	<p>Корректная оценка погрешности для r.</p> <p><i>Примечание:</i> Если нет баллов за значение r, данный пункт не оценивается.</p>	0.5		