

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Т1. Хитрая пушка

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	<p>Записано выражение, связывающее нормальную компоненту ускорения снаряда <math>a_n</math> с угловой скоростью <math>\omega</math>:</p> $a_n = \omega v_0.$	2.0		
2	<p>Определена нормальная компонента ускорения снаряда в момент выстрела:</p> $a_n = g \sin \alpha.$	1.0		
3	<p>Получена зависимость начальной скорости снаряда <math>v_0</math> от направления выстрела:</p> $v_0 = \frac{g \sin \alpha}{\omega}.$	1.0		
4	<p><b>Метод 1.</b> Для времени полёта записано:</p> $t = \frac{2v_{0y'}}{g \cos \varphi}$	2.0		
5	<p><b>Метод 1.</b> Получено ГМТ конца вектора начальной скорости:</p> $\left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$	2.0		
6	<p><b>Метод 1.</b> Указано, что максимальное возможное значение <math>v_{0y'}</math> достигается, когда конец вектора скорости лежит на перпендикуляре, проведённом к направлению поверхности горки из центра окружности.</p>	1.0		

7	<p><b>Метод 1.</b> Определена величина <math>v_{0y'(max)}</math>:</p> $v_{0y'(max)} = \frac{g(1 - \sin \varphi)}{2\omega}.$	1.0		
8°	<p><b>Метод 2.</b> Для времени полёта записано:</p> $t = \frac{2v_{0y'}}{g \cos \varphi}$	2.0		
9°	<p><b>Метод 2.</b> Получена зависимость времени полёта от угла <math>\alpha</math>:</p> $t = \frac{2 \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)}{\omega \cos \varphi}.$	1.0		
10°	<p><b>Метод 2.</b> Предложен способ нахождения экстремума функции (например, преобразование тригонометрических функций в сумму, взятие производной, исследование дискриминанта биквадратного уравнения относительно <math>\sin \alpha</math> или <math>\cos \alpha</math> и т.д).</p>	1.0		
11°	<p><b>Метод 2.</b> Получено условие экстремума функции:</p> $\sin(2\alpha + \varphi) = 1,$ <p>или эквивалентное ему.</p>	2.0		
12°	<p><b>Метод 3.</b> Построен векторный треугольник перемещений для момента падения на горку.</p>	2.0		
13°	<p><b>Метод 3.</b> Получено выражение для времени полёта:</p> $t = \frac{2 \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)}{\omega \cos \varphi}.$	1.0		
14°	<p><b>Метод 3.</b> Предложен способ нахождения экстремума функции (например, преобразование тригонометрических функций в сумму, взятие производной, исследование дискриминанта биквадратного уравнения относительно <math>\sin \alpha</math> или <math>\cos \alpha</math> и т.д).</p>	1.0		

15°	<p><b>Метод 3.</b> Получено условие экстремума функции:</p> $\sin(2\alpha + \varphi) = 1,$ <p>или эквивалентное ему.</p>	2.0		
16°	<p><b>Метод 4.</b> Записаны выражения для зависимостей обеих координат <math>x</math> и <math>y</math> от времени <math>t</math>:</p> $x = v_0 \sin \alpha t \quad y = v_0 \cos \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$	1.0		
17°	<p><b>Метод 4.</b> Указано, что в момент падения снаряда на горку:</p> $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi.$	1.0		
18°	<p><b>Метод 4.</b> Получена зависимость времени <math>t</math> движения снаряда от угла <math>\alpha</math>:</p> $t = \frac{2z - \operatorname{tg} \varphi}{\omega \sqrt{1 + z^2}}, \quad z = \operatorname{ctg} \alpha.$	1.0		
19°	<p><b>Метод 4.</b> Предложен способ нахождения экстремума функции (например, взятие производной, исследование дискриминанта квадратного уравнения относительно <math>\operatorname{ctg} \alpha</math> и т.д).</p>	1.0		
20°	<p><b>Метод 4.</b> Правильно определён экстремум функции:</p> $\left( \frac{z - \operatorname{tg} \varphi}{1 + z^2} \right)_{\max} = \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{2(1 + \sin \varphi)}.$	2.0		

21	<p>Получен ответ для <math>t_{max}</math> (по 1.0 балла за выражение через <math>\omega</math> и численное значение:)</p> $t_{max} = \frac{1 - \sin \varphi}{\omega \cos \varphi} = \frac{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\omega \cos \varphi} =$ $= \frac{\cos \varphi}{\omega(1 + \sin \varphi)} = \frac{2}{\omega\sqrt{3}} \approx 1.15 \text{ с.}$	2 по 1.0		
----	---	-------------	--	--

Шифр

 $\Sigma$ **10-Т2. Шайбами по барабану**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Отмечено, что проекции скоростей на ось, перпендикулярную линии центров, остаются постоянными в процессе соударений, поскольку трения между шайбами и барабаном отсутствует.	0.5		
1.2	Для первого соударения барабана с шайбой 1 записан закон сохранения импульса в проекции на ось $y$ , направленную вдоль линии центров от шайбы 1 к центру барабана: $mv_0 \cos \alpha = Mv_{M1} + mv_{1y},$ где $\alpha$ – угол между вектором скорости шайбы 1 и линией центров, $v_{M1}$ – скорость барабана после удара, $v_{1y}$ – проекция скорости шайбы 1 на ось $y$ после удара.	1.0		
1.3	Для первого соударения барабана с шайбой 1 записан закон сохранения энергии: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{1y}^2}{2} + \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} + \frac{Mv_{M1}^2}{2}.$	1.0		
1.4	Записано или используется в решении выражение для угла или какой-либо его тригонометрической функции, например, $\cos \alpha = \frac{S}{2R}$	0.5		
1.5	Получено выражение для скорости барабана после первого удара $v_{M1} = \frac{2mv_0 \cos \alpha}{m + M} = \frac{4}{3}v_0 \cos \alpha$	0.5		

1.6	<p>Получено выражение для проекции скорости шайбы 1 после удара:</p> $v_{1y} = \frac{(m - M)v_0 \cos \alpha}{m + M} = \frac{1}{3}v_0 \cos \alpha$	0.5		
1.7	<p>Записано условие, при котором не будет столкновения между шайбой 2 и барабаном:</p> $v_{M1} \cos 2\alpha + v_0 \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$	0.5		
1.8	<p>Проверено, что условие отсутствия столкновения между шайбой 2 и барабаном выполнено:</p> $\cos \alpha = \frac{1}{4} < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$ <p>Сделан вывод, что в заданной системе трех тел произошло суммарно всего одно столкновение</p>	0.5		
1.9	<p>Получено выражение для искомой скорости налетающих шайб:</p> $u_1 = v_{M1} \Rightarrow v_0 = 3u_1.$	1.0		
2.1	<p>Указано, что при <math>S = R</math> происходит столкновение барабана с шайбой 2.</p>	0.5		
2.2	<p>Для первого соударения барабана с шайбой 2 записан закон сохранения импульса в проекции на ось <math>z</math>, направленную вдоль линии центров от шайбы 2 к центру барабана:</p> $mv_0 \cos \alpha - Mv_{M1} \cos 2\alpha = Mv_{M2z} + mv_{2z}.$	1.0		

2.3	<p>Для первого соударения барабана с шайбой 2 записан закон сохранения энергии:</p> $\frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv_{M1}^2}{2} = \frac{mv_{2z}^2}{2} + \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} + \frac{Mv_{M2z}^2}{2} + \frac{Mv_{M1}^2 \sin^2 2\alpha}{2}.$	1.0		
2.4	<p>Получено выражение для проекции скорости барабана на ось <math>z</math> после удара:</p> $v_{M2z} = \frac{2mv_0 \cos \alpha + (m - M)v_{M1} \cos 2\alpha}{m + M} = \frac{8}{9}v_0 \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha).$	1.0		
2.5	<p>Записано условие, при котором не будет второго столкновения между шайбой 1 и барабаном:</p> $v_{M1} \sin^2 2\alpha - v_{M2z} \cos 2\alpha - v_{1y} > 0.$	0.5		
2.6	<p>Проверено, что при <math>\cos \alpha = 1/2</math> условие выполнено, и в заданной системе трех тел произошло суммарно два столкновения.</p>	0.5		
2.7	<p>Записано выражение для итоговой скорости барабана:</p> $u_2^2 = v_{M1}^2 \sin^2 2\alpha + v_{M2z}^2.$	0.5		
2.8	<p>Получен ответ для итоговой скорости барабана:</p> $u_2 = \frac{2\sqrt{13}v_0}{9} = \frac{2\sqrt{13}u_1}{3}.$	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Т3. Загогулина

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	В решении присутствует явное утверждение о наличии воздушной пробки в треть-ем колене. Если такого утверждения нет, но из решения видно, что решение построено с учётом наличия воздушной пробки, ставится полный балл.	2.0		
1.2	Записаны два независимых уравнения баланса давлений, связывающих давление в воздушной пробке с высотой столба жидкости $H$ и с размером воздушной пробки $x$ (или эквивалентные соотношения).	2 уравн по 1.0		
1.3	Получено выражение для связи размера пробки $x$ , высоты жидкости в левом колене $H$ и высоты вертикальных участков $l$ . (Балл ставится, если в решении правильно найдена $H$ , даже если явная формула отсутствует.)	1.0		
1.4	Записан закон Бойля-Мариотта или уравнение Менделеева-Клапейрона для воздуха в воздушной пробке	1.0		
1.5	Получено квадратное уравнение, позволяющее определить значение $H$ или $x$ (размер воздушной пробки или высоту водяного столба в третьем участке).	2.0		
1.6	Получено выражение для $H$ .	1.0		
2.1	Записано выражение для общей длины водяного столба внутри трубки.	1.0		
2.2	Получен ответ для объёма воды в трубке.	2.0		



Шифр

 $\Sigma$ **10-Т4. Источник стабильности**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	В случае, когда диод закрыт, токи через все амперметры выражены через $I_0$	1.0		
1.2	Дан верный ответ на первый вопрос задачи. <i>Примечание:</i> Если балл за предыдущий пункт не поставлен, данный пункт не оценивается	1.0		
2.1	Найдена корректная связь между напряжением открытия диода, $I_1$ и сопротивлением амперметра	1.5		
2.2	Указано, что отсутствие тока через $A_2$ возможно только при открытом диоде	1.0		
2.3	В случае, когда диод открыт, токи через амперметры $A_1$ , $A_3$ , $A_4$ и диод выражены через $I_0$	1.0		
2.4	Найдено, что ток через амперметр $A_2$ не течёт при $I_0 = 8I_1/3$	1.5		
3.1	Построена часть графика зависимости показаний амперметра $A_2$ от силы тока через источник, соответствующая $I_0 < I_1$ . <i>Примечание:</i> При построении графика допустимо откладывать на одной или обеих осях безразмерные величины: $I_0/I_1$ вместо $I_0$ и/или $I_{A2}/I_1$ вместо $I_{A2}$	1.0		
3.2	На графике выделена точка с координатами $(I_1; I_1/3)$ (или аналогичная точка в выбранной допустимой системе координат)	0.5		
3.3	Обосновано, что участок графика зависимости показаний амперметра $A_2$ от силы тока через источник, соответствующий $I_0 > I_1$ , является прямолинейным и проходящим через точки $(I_1; I_1/3)$ и $(8I_1/3; 0)$ . <i>Примечание:</i> Для обоснования достаточно вывести, что сила тока через $A_2$ выражается формулой $I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5$ .	2.0		

3.4	<p>Корректно построена часть графика зависимости показаний амперметра <math>A_2</math> от силы тока через источник, соответствующая <math>I_0 &gt; I_1</math>.</p> <p><i>Примечание:</i> Данный пункт оценивается, только если поставлены баллы на предыдущий пункт.</p>	1.0		
3.5	<p>На графике выделена точка с координатами <math>(8I_1/3; 0)</math> (или иная точка на прямой <math>I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5</math> при <math>I_0 &gt; I_1</math>).</p>	0.5		

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Т5. В фокусе внимания

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
	<b>Собирающая линза.</b>			
1	Указано, что луч, прошедший через фокус $F$ собирающей линзы, после преломления идёт параллельно ГОО.	1.0		
2	Восстановлено положение ГОО (через фокус $F$ проведена прямая, параллельная лучу после преломления).	1.0		
3	Восстановлено положение плоскости линзы (через точку, где преломляется луч, проведен перпендикуляр к ГОО)	1.0		
	<i>Все решения, использующие другие корректные построения и приводящие к правильному ответу, засчитываются наравне с авторским.</i>			
	<b>Рассеивающая линза.</b>			
4	На отрезке, соединяющем фокус $F$ и точку преломления луча, построена окружность.	2.0		
5	Показано, что луч, прошедший через фокус $F$ рассеивающей линзы, после преломления идет так, как будто прошел через половинный фокус (т.е. делит отрезок $OF$ пополам).	2.0		
6	Построено продолжение луча, преломленного в линзе до пересечения с окружностью.	1.0		
7	Построен вспомогательный луч, параллельный продолжению преломленного луча, находящийся в 2 раза дальше от фокуса $F$ линзы.	2.0		
8	Восстановлено положение плоскости линзы в варианте с оптическим центром в точке $O_1$ .	1.0		
9	Восстановлено положение плоскости линзы в варианте с оптическим центром в точке $O_2$ .	1.0		
	<i>Все решения, использующие другие корректные построения и приводящие к правильному ответу, засчитываются наравне с авторским.</i>			

## 10 класс

### Задача №1. Хитрая пушка

Пусть ускорение свободного падения равняется  $g$ , а выстрел производится под углом  $\alpha$  к вертикали со скоростью  $v_0(\alpha)$ . Тогда имеем:

$$a_n = \omega v_0(\alpha) = g_n = g \sin \alpha \Rightarrow v_0(\alpha) = \frac{g \sin \alpha}{\omega}.$$

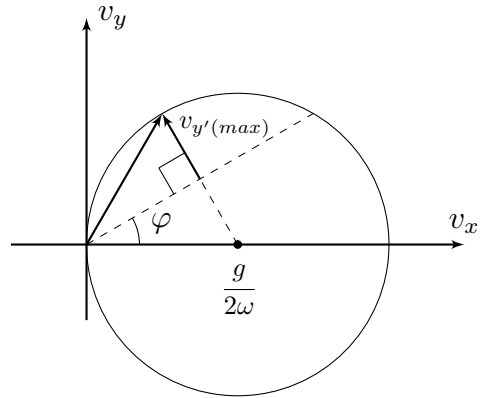
Далее можно решать задачу четырьмя способами.

#### Первое способ:

Введём координатную ось  $y'$ , направленную перпендикулярно поверхности горки. Проекция ускорения снаряда на ось  $y'$  равна  $g_{y'} = -g \cos \varphi$ . Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = -\frac{2v_{0y'}}{g_{y'}} = \frac{2v_{0y'}}{g \cos \varphi}.$$

Максимально возможному времени полёта снаряда соответствует максимальное значение  $v_{0y'}$ . Введём систему координат  $Oxy$  с началом в месте расположения пушки, где ось  $x$  направлена вправо, а ось  $y$  – вертикально вверх. Тогда:



$$v_0 = \frac{g \sin \alpha}{\omega} = \frac{g v_{0x}}{\omega v_0} \Rightarrow v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{g v_{0x}}{\omega},$$

откуда получаем:

$$\left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$$

Таким образом, геометрическое место точек конца вектора скорости  $\vec{v}_0$  представляет собой окружность (см.рис). Из геометрии рисунка следует, что максимальное время полёта соответствует максимально возможному значению  $v_{0y'}$ , которое достигается, когда конец вектора скорости лежит на перпендикуляре, проведённом к направлению поверхности горки из центра окружности. Получаем:

$$v_{0y'}(max) = \frac{g(1 - \sin \varphi)}{2\omega},$$

откуда:

$$t_{max} = \frac{1 - \sin \varphi}{\omega \cos \varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

**Второй способ:**

Проекция начальной скорости снаряда на ось  $y'$  равна  $v_{0y'} = v_0 \cos(\alpha + \varphi)$ . Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = \frac{2v_0(\alpha) \cos(\alpha + \varphi)}{g \cos \varphi} = \frac{2 \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)}{\omega \cos \varphi}.$$

Воспользуемся преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму:

$$2 \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi) = \sin(\alpha - (\alpha + \varphi)) + \sin(\alpha + (\alpha + \varphi)) = \sin(2\alpha + \varphi) - \sin \varphi.$$

Максимальное значение  $\sin(2\alpha + \varphi) = 1$ .

Аналогично преобразованию произведения тригонометрических функций в сумму, можно найти максимальное значение  $t$ , продифференцировав полученное выражение по  $\alpha$ :

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{2}{\omega \cos \varphi} \frac{d(\sin \alpha \cos(\alpha + \varphi))}{d\alpha} = 0$$

Отсюда:

$$\cos \alpha \cos(\alpha + \varphi) - \sin \alpha \sin(\alpha + \varphi) = \cos(2\alpha + \varphi) = 0.$$

Таким образом:

$$2\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

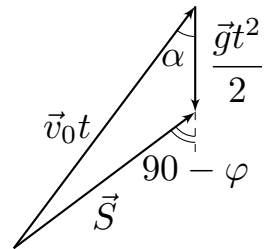
Тогда максимальное время  $t_{max}$  составляет:

$$t_{max} = \frac{1 - \sin \varphi}{\omega \cos \varphi} = \frac{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\omega \cos \varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

**Третий способ:**

Построим векторный треугольник перемещений для момента падения снаряда на горку. В указанный момент времени вектор перемещения образует угол  $\varphi$  с горизонтом, поэтому из теоремы синусов находим:

$$\frac{v_0 t}{\sin(90 + \varphi)} = \frac{v_0 t}{\cos \varphi} = \frac{gt^2}{2 \sin(90 - \alpha - \varphi)} = \frac{gt^2}{2 \cos(\alpha + \varphi)}.$$



Отсюда:

$$t = \frac{2v_0 \cos(\alpha + \varphi)}{g \cos \varphi} = \frac{2 \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)}{\omega \cos \varphi}.$$

Исследование полученного выражения на максимум совпадает с проделанным в рамках первого способа решения. Таким образом:

$$t_{max} = \frac{1 - \sin \varphi}{\omega \cos \varphi} = \frac{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\omega \cos \varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

#### Четвёртый способ:

Решим задачу классическим способом – используя зависимости координат  $x$  и  $y$  от времени  $t$ :

$$x = v_{0x}t = v_0 \sin \alpha t \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \cos \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня на горку  $y/x = \operatorname{tg} \varphi$ . Отсюда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{gt}{2v_0 \sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\omega t}{2 \sin^2 \alpha}.$$

Введём переменную  $z = \operatorname{ctg} \alpha$ . Учитывая, что  $1/\sin^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + z^2$ , получим:

$$t = \frac{2z - \operatorname{tg} \varphi}{\omega(1 + z^2)} = \frac{2f(z)}{\omega}.$$

Время  $t$  принимает значение, когда максимальное значение принимает функция  $f(z)$ . Определим величину  $z_0$ , соответствующую максимальному значению  $f(z)$ :

$$\frac{df(z_0)}{dz} = \frac{1 + z_0^2 - 2z_0(z_0 - \operatorname{tg} \varphi)}{(1 + z_0^2)^2} = 0 \Rightarrow z_0^2 - 2z_0 \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$z_0 = \operatorname{tg} \varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} \Rightarrow z_0 = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Таким образом:

$$f_{max} = f(z_0) = \frac{\left( \frac{1}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi \right)}{1 + \left( \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^2} = \frac{\cos \varphi}{2(1 + \sin \varphi)}.$$

Максимальное значение  $f(z)$  может быть найдено из без использования производной. Действительно:

$$\frac{z - \operatorname{tg} \varphi}{1 + z^2} = f(z) \Rightarrow z^2 f(z) - z + f(z) + \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Исследуем дискриминант полученного уравнения:

$$D = 1 - 4f(z)(f(z) + \operatorname{tg} \varphi) \geq 0$$

Максимально возможное значение  $f(z)$  соответствует равному нулю дискриминанту. Отсюда:

$$4f^2(z) + 4f(z) \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0 \Rightarrow f_{\max} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{2} = \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cos \varphi}.$$

Окончательно:

$$t_{\max} = \frac{\cos \varphi}{\omega(1 + \sin \varphi)} = \frac{1 - \sin \varphi}{\omega \cos \varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

### Задача №10-Т2. Шайбами по барабану

Определим скорость барабана после соударения с шайбой 1. Поскольку трения между шайбами и барабаном нет – все их удары центральные, и движение всех тел остается поступательным, а проекции скоростей тел на ось, перпендикулярную линии центров, остаются постоянными в процессе соударения. Введём вдоль линии центров ось  $y$ , направленную от шайбы 1 к центру барабана. Пусть  $\alpha$  – угол между вектором скорости шайбы 1 и линией центров. Запишем систему из закона сохранения импульса в проекции на ось  $y$  и закона сохранения энергии:

$$\begin{cases} mv_0 \cos \alpha = Mv_{M1} + mv_{1y} & \text{ЗСИ} \\ \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = \frac{mv_{1y}^2}{2} + \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} + \frac{Mv_{M1}^2}{2} & \text{ЗСЭ} \end{cases}$$

Решая записанную систему уравнений, находим:

$$v_{M1} = v_0 \cos \alpha + v_{1y} = 2v_0 \cos \alpha - \frac{Mv_{M1}}{m} \Rightarrow v_{M1} = \frac{2mv_0 \cos \alpha}{m + M}.$$

Получим условие, при котором будет столкновение между шайбой 2 и барабаном. Если ввести ось  $z$ , направленную от шайбы 2 к центру барабана, то условие столкновения будет заключаться в том, что проекция скорости барабана относительно шайбы 2 на ось  $z$  будет отрицательной, т.е при условии:

$$v_{z(\text{отн})} = -v_{M1} \cos 2\alpha - v_0 \cos \alpha = -v_0 \cos \alpha \left( 1 + \frac{2m \cos 2\alpha}{m + M} \right) < 0.$$

Поскольку  $\cos \alpha > 0$ , данное условие можно записать следующим образом:

$$1 + \frac{2m \cos 2\alpha}{m + M} = 1 + \frac{2m(2 \cos^2 \alpha - 1)}{m + M} > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{S}{2R} > \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{M}{m}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

или же при условии:

$$S > \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Данное условие не выполнено при  $S_1 = R/2$ , поэтому столкновения между барабаном и шайбой 2 не будет, а значит  $v_{M1} = u_1$ :

$$u_1 = \frac{mv_0}{m + M} \frac{S_1}{R} = \frac{v_0}{3}.$$

Таким образом:

$$v_0 = 3u_1.$$

При  $S_2 = R$  столкновение между барабаном и шайбой 2 будет, при этом  $\alpha_2 = 60^\circ$ . В системе отсчёта, движущейся со скоростью  $\vec{v}_{M1}$ , соударение сводится к рассмотренному ранее. В данной системе отсчёта проекция  $v_{2z}$  скорости шайбы 2 на ось  $z$  равняется:

$$v_{2z} = v_0 \cos \alpha + v_{M1} \cos 2\alpha = \frac{v_0}{2} + \frac{2v_0}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{v_0}{6}.$$

В указанной системе отсчёта скорость барабана сразу после соударения равна:

$$v_{M2} = \frac{2mv_{2y'}}{m + M} = \frac{2v_0}{9}.$$

Обратим внимание, что проекция скорости  $\vec{v}_{M2}$  на ось  $y$  является положительной, а значит, повторного столкновения барабана с шайбой 1 не будет.

Для скорости  $u_2$  имеем:

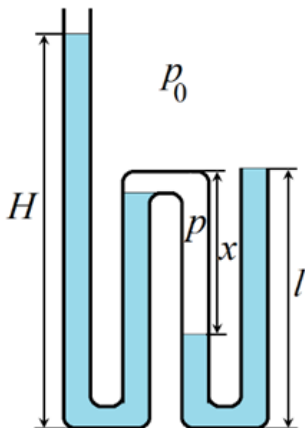
$$u_2 = \sqrt{v_{M1}^2 + v_{M2}^2 - 2v_{M1}v_{M2} \cos 2\alpha},$$

откуда:

$$u_2 = \frac{2\sqrt{13}u_1}{3}.$$



Задача №10-Т3. Загогулина



После заполнения водой второго слева вертикального участка, вода начнет стекать в третье колено, заполнит перемычку внизу между третьим и четвёртым и «отсечёт» воздух в третьем колене от атмосферного. Образуется воздушная «пробка», давление  $p$  внутри которой по мере заполнения четвёртого колена будет возрастать. Запишем условия равновесия (равенства давлений) для первого и второго вертикальных участков трубки:

$$p_0 + \rho g H = p + \rho g l. \quad (1)$$

Для третьего и четвертого

$$p_0 + \rho g l = p + \rho g (l - x).$$

Вычитая эти уравнения, получим

$$H - l = x.$$

Поскольку воздух внутри трубки начал сжиматься от объёма, соответствующего одному вертикальному участку, то по закону Бойля-Мариотта:

$$p_0 l S = p x S.$$

Из последних двух уравнений находим:

$$p = \frac{p_0 l}{H - l}.$$

Подставляем это в уравнение (1):

$$p_0 + \rho g H = \frac{p_0 l}{H - l} + \rho g l.$$

Избавимся от знаменателя в правой части и перегруппируем:

$$\rho g (H - l)^2 + p_0 (H - l) - p_0 l = 0.$$

Обозначив для удобства  $p_0/g = l_0$ , решаем квадратное уравнение, оставляя только имеющий физический смысл положительный корень:

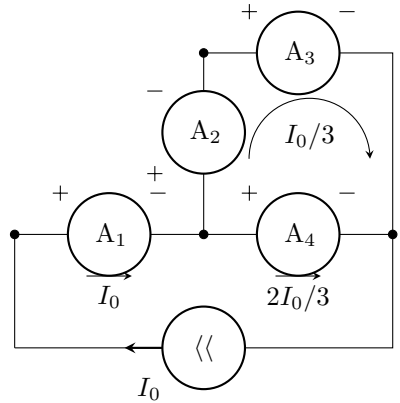
$$H = l + \frac{1}{2} \left( \sqrt{l_0^2 + 4l_0 l} - l_0 \right).$$

Объём налитой воды можно определить по суммарной длине трубы, занятой водой:

$$V = S(H + 3l - x) = 4Sl.$$

### Задача №10-Т4. Источник стабильности

Рассмотрим малые значения силы тока  $I_0$ , при которых диод будет закрыт. В этом случае эквивалентная схема примет вид, изображённый на рисунке. Найдём токи, текущие через амперметры. Сила тока через  $A_1$  равна  $I_0$ . Так как  $A_4$  присоединён параллельно к паре амперметров  $A_2$  и  $A_3$ , а его сопротивление вдвое меньше, чем суммарное сопротивление второго и третьего прибора, сила тока через  $A_4$  будет равна  $2I_0/3$ . Сила тока, текущего через  $A_2$  и  $A_3$ , следовательно, станет  $I_0/3$ . На графике, представленном в условии, участок идущий от начала координат описывается уравнением  $I = 2I_0/3$ , что соответствует результату, полученному для четвёртого амперметра.



Пусть  $r$  — сопротивление амперметра. Определим сначала напряжение открытия диода  $U_D$ . Так как характер зависимости тока через четвёртый амперметр от  $I_0$  меняется при  $I_0 = I_1$ , это значение соответствует тому, что напряжение на диоде достигло  $U_D$ , но ток через диод ещё равен нулю (переход от горизонтального участка ВАХ прибора к вертикальному). Запишем условие равенства

напряжения на диоде суммарному напряжению на первом и втором амперметре при  $I_0 = I_1$

$$U_D = I_1 r + \frac{I_1}{3} \cdot r = \frac{4I_1 r}{3}.$$

Ситуация, когда ток через второй амперметр не течёт, во-первых, может произойти только при открытом диоде. Во-вторых, если ток через  $A_2$  не течёт, то напряжения на  $A_3$  и  $A_4$  равны, что означает равенство токов через них:

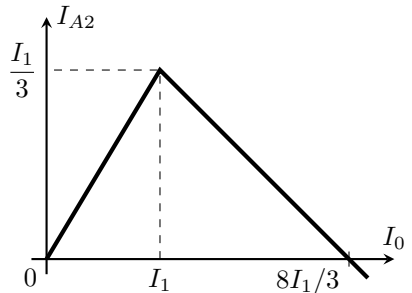
$$I_{A3} = I_{A4} = \frac{I_0}{2}.$$

Соответственно, должны быть равны напряжения на первом амперметре и диоде. Поскольку в рассматриваемом случае  $I_{A1} = I_{A4}$ ,

$$U_D = I_{A1} r \Rightarrow \frac{4I_1 r}{3} = \frac{I_0}{2} \cdot r \Rightarrow I_0 = \frac{8I_1}{3}.$$

Пока диод закрыт, то есть при  $I_0 < I_1$ , сила тока через второй амперметр равна  $I_{A2} = I_0/3$ . Если  $I_0 > I_1$ , напряжение на диоде постоянно и равно  $U_D = 4I_1 r/3$ . Чтобы построить ту часть искомого графика, которая соответствует открытому диоду, можно рассуждать одним из двух способов.

Способ 1. ВАХ диода состоит из двух прямолинейных участков — горизонтального и вертикального. Поэтому, если находиться в пределах только одного участка (в данном случае, вертикального), диод можно считать линейным элементом. Остальные элементы цепи, представленной в условии, тоже имеют прямолинейные ВАХ, то есть также являются линейными. Следовательно, зависимость силы тока на втором амперметре от  $I_0$  при  $I_0 > I_1$  является линейной. Отсюда, учитывая, что график этой зависимости должен проходить через точки  $(I_1; I_1/3)$  и  $(8I_1/3; 0)$ , получим график, изображённый на рисунке.



Способ 2 Расставим токи в цепи при  $I_0 > I_1$ , учитывая, что напряжение на диоде равно  $U_D$ . Пусть сила тока через второй амперметр равна  $I_{A2}$ . Тогда, исходя из равенства суммы напряжений на  $A_1$  и  $A_2$  напряжению на диоде, получим, что ток через первый амперметр

$$I_{A1} = \frac{U_D - I_{A2} r}{r} = \frac{U_D}{r} - I_{A2}.$$

Соответственно, токи через  $A_3$  и  $A_4$  будут равны

$$I_{A4} = I_{A1} - I_{A2} = \frac{U_D}{r} - 2I_{A2},$$

$$I_{A3} = I_0 - I_{A4} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 2I_{A2}.$$

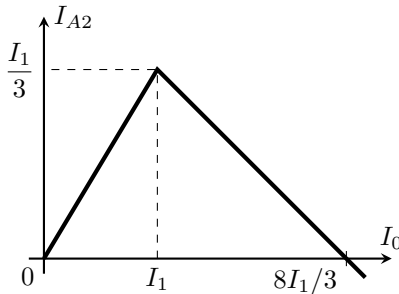
Так как сумма напряжений на  $A_2$  и  $A_3$  должна быть равна напряжению на  $A_4$ ,

$$I_{A4}r = I_{A2}r + I_{A3}r \Rightarrow \frac{U_D}{r} - 2I_{A2} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 3I_{A2}.$$

Отсюда, используя равенство  $U_D = 4I_1r/3$ , найдём, что

$$I_{A2} = \frac{2U_D}{5r} - \frac{I_0}{5} = \frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5}.$$

Далее строим графики зависимостей  $I_{A2} = I_0/3$  при  $I_0 < I_1$  и  $I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5$  при  $I_0 > I_1$  и получаем тот же рисунок, что и в Способе 1.

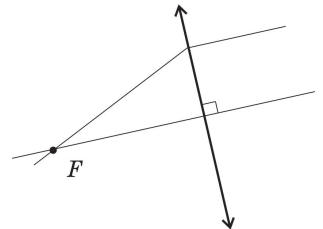


### Задача №10-Г5. В фокусе внимания

Возможны два случая – линза собирающая и линза рассеивающая. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

#### Собирающая линза.

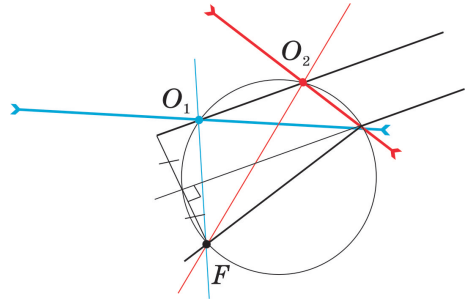
Луч, прошедший через фокус собирающей линзы, после преломления в ней идёт параллельно главной оптической оси. Таким образом, из рисунка нам известно направление главной оптической оси (далее – ГОО) и одна из её точек ( $F$ ). По этим данным восстанавливаем положение ГОО. Для этого проводим через  $F$  прямую, параллельную лучу после преломления. Плоскость линзы перпендикулярна ГОО и нам



известна одна из её точек - точка, где преломляется луч. Положение плоскости линзы восстанавливаем проведением перпендикуляра к ГОО из точки преломления луча.

**Рассеивающая линза.**

Фокус линзы  $F$ , её оптический центр  $O$  и точка преломления луча образуют прямоугольный треугольник. Построим на отрезке (как на диаметре), соединяющем фокус и точку преломления луча, окружность. Оптический центр должен лежать на этой окружности. Из формулы тонкой линзы (или используя тот факт, что параллельный пучок лучей после преломления на рассеивающей линзе идёт так, что продолжения пересекаются



в одной точке фокальной плоскости) можно показать, что луч, прошедший через фокус рассеивающей линзы, после преломления идёт так, как будто прошёл через половинный фокус. Продлим луч, который преломился в линзе – он должен делить пополам отрезок  $OF$ . Построим вспомогательный луч, параллельный продолжению преломленного луча и находящийся в два раза дальше от точки  $F$ . Он пройдет через оптический центр линзы, не отклоняясь от своего первоначального направления. Таким образом, оптический центр линзы может находиться в точках пересечения вспомогательного луча с окружностью. В нашем случае таких пересечений два (точки  $O_1$  и  $O_2$ ). Значит, возможны два варианта расположения рассеивающей линзы. В каждом варианте плоскость линзы проходит через точку преломления исходного луча и соответствующий оптический центр.

Отметим, что в случае рассеивающей линзы для двух полученных решений известный нам луч идет под разными углами к ГОО линзы, которые по построению связаны между собой. Если обозначить за  $\alpha_1$  угол между лучом и  $FO_1$  и за  $\alpha_2$  — угол между лучом и  $FO_2$ , то можно показать, что  $\text{tg } \alpha_1 \cdot \text{tg } \alpha_2 = 1/2$ . Следовательно, только один из этих лучей может являться параксиальным — ведь если один из этих углов мал ( $\text{tg } \alpha_1$ ), то другой должен иметь достаточно большое значение тангенса. Может быть и так, что оба угла не являются малыми. Поэтому только свойство линзы, указанное в «Примечании» условия, позволяет нам считать, что оба решения корректны.