

11 класс

11.1. Треугольник. Тепловая машина в процессе с молярной теплоемкостью $2R$ увеличивает температуру рабочего тела (1 моля гелия) от T_1 до некой неизвестной температуры, далее уменьшает температуру до $2T_1$ в процессе с молярной теплоемкостью $3/2 R$ и возвращается в исходное состояние с теплоемкостью $5/2 R$. Начертите PV -диаграмму тепловой машины и определите ее КПД.

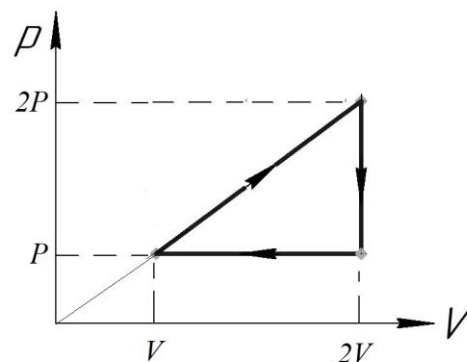
Решение (фольклор):

Процесс с молярной теплоемкостью $3/2 R$ – процесс с неизменным объемом.

Процесс с молярной теплоемкостью $5/2 R$ – процесс с неизменным давлением.

Процесс с молярной теплоемкостью $2R$ – процесс $p \sim V$. Это следует, например, из уравнения политропы.

Конфигурация, описанная в задаче на PV -диаграмме выглядит как треугольник.



Из подобия треугольников и из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что неизвестная температура – это $4T_1$.

Для начальной точки процесса $PV = RT_1$. Работа за цикл равна $A = \frac{PV}{2} = \frac{RT_1}{2}$. Тепло подводилось только на начальном участке $Q_+ = 2R \cdot 3T_1 = 6RT_1$.

$$\text{Искомое КПД } \eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{1}{12}$$

Критерии оценивания (10 баллов)

1	$\frac{3}{2}R = C_V$	0,5 балла
2	$\frac{5}{2}R = C_p$	0,5 балла
3	Процесс с молярной теплоемкостью $2R$ – процесс $p \sim V$	2 балла
4	Правильно начерчен качественный вид PV -диаграммы	2 балла
5	Грамотно применены уравнения Менделеева-Клапейрона	1 балл
6	$A = \frac{PV}{2} = \frac{RT_1}{2}$ или аналогичное	1 балл
7	$Q_+ = 6RT_1$ или аналогичное	1 балл
8	$\eta = \frac{A}{Q_+}$ или аналогичное	1 балл
9	Ответ $\eta = \frac{1}{12}$	1 балл

11.2. Резинка. Заряженное резиновое кольцо имеет радиус $R_1 = 13,6$ см. Когда заряд кольца уменьшили вдвое, его радиус уменьшился до $R_2 = 11,3$ см. Определите радиус незаряженного кольца R_0 . Для кольца справедлив закон Гука.

Решение (Рубцов Д.Н.):

Из соображений симметрии заряд Q распределится равномерно по всему кольцу радиусом R , поэтому можно говорить о погонной плотности заряда $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$.

Рассмотрим маленькую часть кольца радиусом (дуга угловым размером $\alpha \rightarrow 0$). Она отталкивается от всех элементарных частей кольца, суммарная кулоновская сила направлена перпендикулярно ей и уравнивается противонаправленными компонентами гукских сил.

Ясно, что кулоновская сила пропорциональна заряду всего кольца и заряду маленькой части и обратно пропорциональна квадрату радиуса $F_k = \delta \frac{Q\lambda R\alpha}{R^2} = \delta \frac{Q^2\alpha}{2\pi R^2}$.

Суммарная сила упругости равна $F_0 = k(2\pi R - 2\pi R_0)$, тогда ее компонента, уравнивающая кулоновскую силу $F = 2F_0 \sin \frac{\alpha}{2} = F_0\alpha$.

Приравняв $F_k = F$, получим (*) $\delta \frac{Q^2}{4\pi^2 R^2} = R - R_0$. Заменим $\frac{\delta}{4\pi^2} = \gamma$. Напишем уравнения для наших случаев

$$(1) \gamma \frac{Q^2}{R_1^2} = R_1 - R_0$$

$$(2) \gamma \frac{Q^2}{4R_2^2} = R_2 - R_0$$

Решив получившуюся систему, получим ответ $R_0 = \frac{4R_2^3 - R_1^3}{4R_2^2 - R_1^2} = 10,0$ см.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Идея того, что резинка растягивается из-за взаимного электростатического отталкивания	0,5 балла
2	Суммарная кулоновская сила направлена перпендикулярно элементарному участку кольца	0,5 балла
3	Баланс сил $F = 2F_0 \sin \frac{\alpha}{2} = F_0\alpha$	2 балла
4	Закон Гука $F_0 = k(2\pi R - 2\pi R_0)$,	1 балл
5	Кулоновская сила пропорциональна заряду всего кольца и заряду маленькой части и обратно пропорциональна квадрату радиуса $F_k = \delta \frac{Q\lambda R\alpha}{R^2} = \delta \frac{Q^2\alpha}{2\pi R^2}$.	2 балла
6	Записана система уравнений (1) и (2)	2 балла
7	$R_0 = \frac{4R_2^3 - R_1^3}{4R_2^2 - R_1^2} = 10,0$ см	2 балла

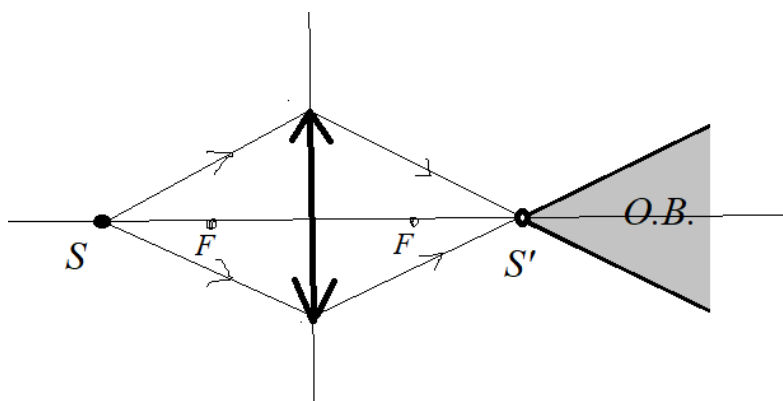
11.3. В двойном фокусе. На рисунке изображен точечный источник света, находящийся в двойном фокусе тонкой собирающей линзы, и сечение области видимости (О.В.) его изображения плоскостью рисунка. Перенесите (схематично) рисунок в бланк решений и восстановите положение линзы (ее сечение плоскостью рисунка) и ее фокусов.



Решение (Рубцов Д.Н.):

Точечный источник света, находящийся в двойном фокусе тонкой собирающей линзы, дает действительное изображение, находящееся в другом двойном фокусе. Это следует из формулы тонкой линзы или из подобия треугольников при рассмотрении хода луча в тонкой линзе.

Область видимости действительного изображения исходит от самого этого изображения S' . Следовательно, отрезок, соединяющий источник S и изображение S' , лежит на главной оптической оси линзы. Середина этого отрезка – оптический центр линзы, а срединный перпендикуляр лежит в плоскости линзы.



Продолжение крайних лучей области видимости до плоскости линзы дает нам ограничение на размер линзы. Фокусы восстанавливаются тривиально.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Изображение находится в двойном фокусе	1 балл
2	Вершина конуса области видимости – само изображение	1 балл
3	Восстановлена Г.О.О.	1 балл
4	Восстановлен оптический центр линзы	1 балл
5	Восстановлена плоскость линзы	2 балла
6	Ограничен размер линзы	3 балла
7	Восстановлены оба фокуса	1 балл

11.4. Максимальная мощность. Тонкий цилиндрический проводник длиной l нагревается до температуры t_1 при подключении его к идеальному источнику напряжения. До какой длины L нужно пластично растянуть проводник, чтобы на нем выделялась максимально возможная тепловая мощность при подключении к тому же источнику? Температура в лаборатории постоянна и равна t_0 . Температура плавления материала проводника t ($t_1 < t$). Количество теплоты, отданное через площадку на границе раздела с воздухом площадью S за время t , пропорционально разности температур этих тел $Q = \beta t S \Delta T$. Считать, что этот металл почти не расширяется при нагревании, его удельное сопротивление не зависит от температуры. Мощностью теплоотдачи через торцы пренебречь.

Решение (Рубцов Д.Н.):

$$m = Sl\rho, R = \delta l/S \rightarrow R = \alpha l^2. \text{ Площадь теплоотдачи } S_0 = 2\pi rl = \gamma\sqrt{l}$$

$$\text{Мощность электрическая идет на мощность потерь. } \frac{U^2}{\alpha \times l^2} = \beta(t_1 - t_0)\sqrt{l}$$

$$\text{Для искомого случая справедливо уравнение } \frac{U^2}{\alpha \times L^2} = \beta(t_2 - t_0)\sqrt{L}$$

Нетрудно найти, что мощность пропорциональна разности температур в степени 4/5

$$P = k\sqrt[5]{(t_1 - t_0)^4}$$

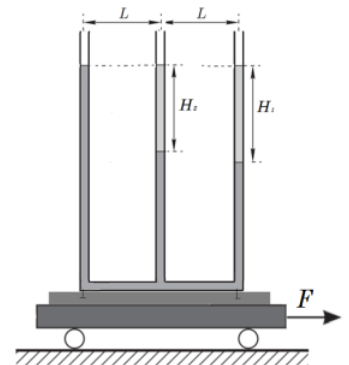
Мощность максимальна, когда температура, до которой нагревается проводник, равна температуре плавления.

$$L = l \times \sqrt[5]{\frac{(t_1 - t_0)^4}{(t - t_0)}}$$

Критерии оценивания (10 баллов)

1	$m = Sl\rho$	0,5 балла
2	$R = \delta l/S$	0,5 балла
3	$S_0 \sim rl$	0,5 балла
4	$S \sim r^2$	0,5 балла
5	Записаны уравнения ТБ	3 балла
6	$P = k\sqrt[5]{(t_1 - t_0)^4}$	2 балла
7	Сделан вывод, что мощность – максимальна, когда проводник нагревается до температуры плавления	1 балл
8	$L = l \times \sqrt[5]{\frac{(t_1 - t_0)^4}{(t - t_0)}}$	2 балла

11.5. **Тройник.** В правое колено сообщающегося сосуда, заполненного водой, наливают керосин высотой H_1 , а в среднее – высотой $H_2 = 20$ см. Плотность керосина $\rho = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, воды $\rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Расстояние между коленами сосуда $L = 50$ см. Тележку начинают двигать с ускорением a таким, что высоты столбов жидкостей во всех трех сосудах становятся одинаковыми и равны $H = 100$ см. Найдите H_1 и a . Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Решение (фольклор):

Т.к. сила F горизонтальна, то и ускорение системы также горизонтально. Это значит, что давления в нижних точках колен равны $p_1 = \rho_0 g(H - H_1) + \rho g H_1$, $p_2 = \rho_0 g(H - H_2) + \rho g H_2$, $p_3 = \rho_0 g H$. Запишем 2 закон Ньютона (теорема о движении центра масс) для горизонтальных столбов воды между коленами: $(p_3 - p_2)S = (p_2 - p_1)S = \rho_0 a L S$. Из этих уравнений получим, что $H_1 = 2H_2 = 40$ см и $a = g \cdot \frac{(\rho_0 - \rho)H_2}{\rho_0 L} = 0,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Выражения для давлений в нижних точках колен	3 балла
2	Теорема о движении центра масс для горизонтальных столбов воды между коленами	3 балла
3	$H_1 = 2H_2 = 40$ см	2 балла
5	$a = g \cdot \frac{(\rho_0 - \rho)H_2}{\rho_0 L} = 0,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	2 балла