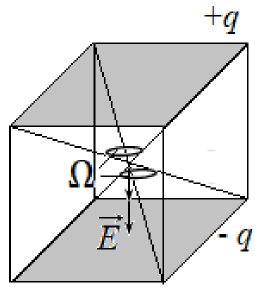
1. По двум противоположным граням диэлектрического кубика равномерно распределили заряды q и $-q$ соответственно. Определите напряжённость электрического поля E в центре симметрии кубика. Длина ребра кубика равна a. Диэлектрическая проницаемость кубика $\varepsilon \approx 1$.

<u>Решение:</u>

Используем теорему о телесном угле: перпендикулярная составляющая напряжённости электрического поля, создаваемого однородно заряженной плоской площадкой, пропорциональна телесному углу, под которым видна эта площадка видна из точки, в которой мы измеряем поле.



$$E_{\perp} = k\sigma d\Omega, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Из симметрии ясно, что любая грань куба из его центра видна под углом

$$\Omega = \frac{1}{6} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{3}$$

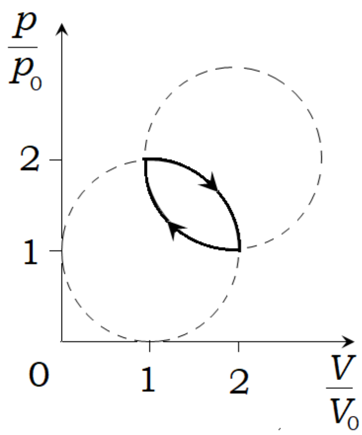
Согласно принципу суперпозиции напряжённость поля складывается из одинаковых напряжённостей, создаваемых положительными и отрицательными зарядами.

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{q}{3\varepsilon_0 a^2}$$

Ответ: $\frac{q}{3\varepsilon_0 a^2}$

Использование теоремы о телесном угле	+2 балла
Расчёт телесного угла грани из центра куба.	+3 балла
Принцип суперпозиции полей.	+2 балла
Расчёт напряжённости	+3 балла

2. Рабочим телом теплового двигателя является идеальный газ. Он работает по циклу, изображённому на рисунке в координатах (p/p_0, V/V_0), где p – давление газа, V – объём газа, а p_0 и V_0 – известные величины. График состоит из двух дуг окружностей радиусами 1 каждая, центры которых находятся в точках с координатами (1, 1) и (2,2). Определите:
   1) работу A, которую совершает двигатель за цикл.
   2) КПД двигателя, работающего по идеальному циклу (состоящему из двух изотерм и двух адиабат) η, если максимальная и минимальная температуры в идеальном цикле равны соответственно максимальной и минимальной температурам в данном цикле.



<u>Решение:</u>

Работа тела, совершающего круговой процесс (цикл) равна площади фигуры, ограниченной графиком зависимости $p(V)$. Причём не натуральной (измеренной по картинке) площади, а площади с учётом масштаба осей.

В нашей задаче одно деление оси абсцисс составляет V_0, а одно деление оси ординат составляет p_0. Поэтому следует, вычислив площадь в квадратных делениях, умножить её затем на p_0V_0.

Фигура, ограниченная циклом, состоит из двух круговых сегментов. Площадь одного сегмента можно вычислить как разность площадей четверти круга и равнобедренного прямоугольного треугольника, составленного из радиусов

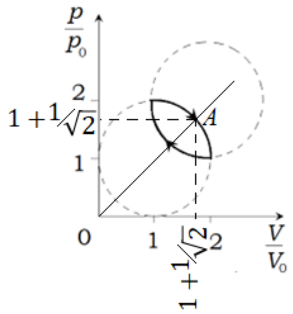
$$S_{\text{СЕГ}} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{2}$$

Тогда работа двигателя за цикл будет равна

$$A = 2S_{\text{СЕГ}} p_0 V_0 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) p_0 V_0 \approx 0{,}57 p_0 V_0$$

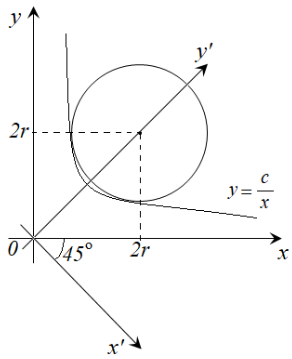
Согласно теореме Карно, КПД двигателя, работающего по идеальному циклу, равно

$$\eta_{\text{ИД}} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$$



По уравнению состояния идеального газа, его температура пропорциональна произведению давления и объёма. Максимальная температура соответствует состоянию, изображаемому точкой A цикла (см. рис.), наиболее удалённой от начала координат. Для неё

$$\frac{p}{p_0} \cdot \frac{V}{V_0} = \frac{\nu R T_{max}}{p_0 V_0} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx 2{,}92$$



Было бы ошибочно сразу полагать, что состояние, соответствующее минимальной температуре, соответствует самой близкой к началу координат точке. При смещении вдоль окружности давление и температура изменяются разнонаправленно. При этом может увеличиваться произведение этих величин. На рисунке представлен пример возникновения подобной ситуации: самая близкая к началу координат изотерма касается окружности в двух точках.

Из-за симметрии графиков, математический анализ удобнее проводить, повернув оси координат на 45^0 по часовой стрелке. Тогда старые координаты выразятся через новые по формулам:

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{y' - x'}{\sqrt{2}}$$

Уравнения наших окружности и гиперболы в новых координатах:

$$\begin{cases} \left(y' - 2\sqrt{2}r\right)^2 + x'^2 = r^2 \\ y'^2 - x'^2 = 2c \end{cases} \rightarrow \left(y' - 2\sqrt{2}r\right)^2 + y'^2 - 2c = r^2$$

Получившееся квадратное уравнение имеет решение, когда графики имеют общие точки

$$2y'^2 - 4\sqrt{2}ry' + 7r^2 - 2c = 0$$

$$D = 32r^2 - 56r^2 + 16c = -24r^2 + 16c \geq 0$$

$$y' = \sqrt{2} + \sqrt{c - 1{,}5r^2}$$

Единственное решение уравнения соответствует минимальному, а, значит, минимальной температуре. Таким образом, минимальная температура соответствует точке ближайшей к началу координат.

$$\frac{p}{p_0}\cdot\frac{V}{V_0}=\frac{\nu RT_{min}}{p_0V_0}=\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\approx 1{,}66$$

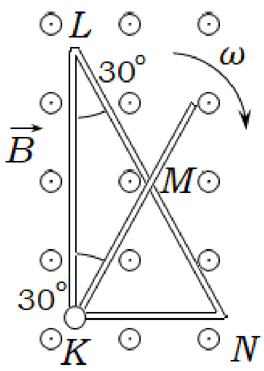
Итак,

$$\eta_{ид}=1-\frac{1{,}66}{2{,}92}\approx 0{,}43$$

Ответ: $0{,}57p_0V_0,\ \ 0{,}43$

Утверждение о том, что работа за цикл равна площади **в масштабе**	+1 балл
Расчёт площади, ограниченной циклом	+3 балла
Теорема Карно	+1 балл
Расчёт максимальной температуры	+1 балл
Доказательство (любое), что точка с минимальной температурой лежит на биссектрисе координатного угла.	+2 балла
Расчёт минимальной температуры	+1 балл
Расчёт КПД	+1 балл

3. Из проводящих цилиндрических стержней одинакового поперечного сечения составлен прямоугольный треугольник *KLN* с острым углом 30^0. Еще один проводящий стержень *KM* такого же сечения скользит по стержню *LN*, поворачиваясь с постоянной угловой скоростью ω вокруг шарнира *K*. Система находится в однородном магнитном поле индукцией *B*, силовые линии которого перпендикулярны плоскости треугольника. Определите силу тока *I*, протекающего через подвижный стержень *MK* в момент, когда он составляет угол 30^0 со стержнем *LK*. Все стержни изготовлены из одинакового материала. Электрическое сопротивление стержня *KN* равно *R*. Длина стержня *KN* равна *L*.



Решение:

При вращении стержня меняются площади контуров *KLM* и *KNM*, и в них появляются ЭДС индукции величиной:

$$\varepsilon_1=B\left|\frac{dS_{KLM}}{dx}\right|=B\cdot\omega\frac{MK\cdot KL}{2}\cdot\cos(\omega t+30^0)\Big|_{t=0}=B\cdot\omega\frac{\sqrt{3}\cdot MK\cdot KL}{4}=\frac{3B\omega L^2}{4}$$

$$\varepsilon_2=B\left|\frac{dS_{KNM}}{dx}\right|=B\left|\frac{dS_{KLM}}{dx}\right|=B\cdot\omega\frac{MK\cdot KN}{2}\cdot\cos(60^0-\omega t)\Big|_{t=0}=B\cdot\omega\frac{MK\cdot KN}{4}=\frac{B\omega L^2}{4}$$

По правилу Ленца направление ε_1по часовой стрелке, а ε_2—против часовой стрелки.

Пусть по перемычке *KLM* протекает ток силой I_1 по часовой стрелке, а по перемычке *KNM* – ток силой I_2. Тогда, согласно I правилу Кирхгофа, по стержню *MK* будет протекать ток силой

$$I=I_1+I_2$$

Запишем II правило Кирхгофа для контуров *KLM* и *KNM*:

$$\varepsilon_1 = (I_1 + I_2)R_{MK} + I_1 R_{KLM}$$
$$\varepsilon_2 = (I_1 + I_2)R_{MK} + I_2 R_{KNM}$$

Разделим обе части первого уравнения на R_{KLM}, а второго на R_{KNM}. Затем сложим уравнения, выразив $I = I_1 + I_2$:

$$I = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{R_{KLM}} + \dfrac{\varepsilon_2}{R_{KNM}}}{\dfrac{R_{MK}}{R_{KLM}} + \dfrac{R_{MK}}{R_{KLM}} + 1}$$

Электрическое сопротивление стержней пропорционально их длине, поэтому

$$R_{MK} = R_{MN} = R_{NK} = R_{LM} = R, \qquad R_{LK} = \sqrt{3}R \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} R_{KLM} = \left(\sqrt{3}+1\right)R \\ R_{KLM} = 2R \end{matrix}$$

Подставим в предыдущее уравнение

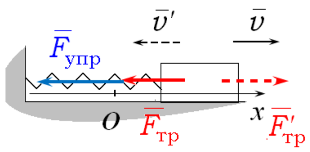
$$I = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{R_{KLM}} + \dfrac{\varepsilon_2}{R_{KNM}}}{\dfrac{R_{MK}}{R_{KLM}} + \dfrac{R_{MK}}{R_{KNM}} + 1} = \frac{\dfrac{3B\omega L^2}{4\left(\sqrt{3}+1\right)R} + \dfrac{B\omega L^2}{4 \cdot 2R}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{2} + 1} = \frac{B\omega L^2}{4R} \cdot \frac{\sqrt{3}+7}{3\sqrt{3}+4} \approx 0{,}237 \cdot \frac{B\omega L^2}{R}$$

Ответ: $\frac{B\omega L^2}{4R} \cdot \frac{\sqrt{3}+7}{3\sqrt{3}+4} \approx 0{,}237 \cdot \frac{B\omega L^2}{R}$

Вычисление ЭДС в первом контуре	+2 балла
Вычисление ЭДС во втором контуре	+2 балла
I правило Кирхгофа	+1 балл
II правило Кирхгофа для первого контура	+1 балл
II правило Кирхгофа для второго контура	+1 балл
Решение системы уравнений	+1 балл
Использование формулы сопротивления цилиндрического проводника	+1 балл
Верный ответ	+1 балл

4. Брусок массы m = 600 г лежит на горизонтальном столе и прикреплён к вертикальной неподвижной стенке упругой невесомой пружиной жёсткостью k = 80 Н/м. Недеформированная длина пружины равна l_0 = 20 см. Брусок отвели от стенки по горизонтали, деформировав пружину на Δl = 10 см, и отпустили без толчка. На каком расстоянии L от стенки остановится брусок, если коэффициент трения скольжения бруска по столу равен $\mu = 0{,}3$?

Решение:



Движение бруска по горизонтали происходит под действием двух сил: упругости и трения (см.рис.)

Проекция силы трения на ось *Ox* зависит от направления движения

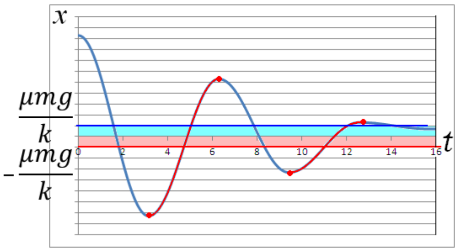
$$m\ddot{x} = \begin{cases} -kx - \mu mg, & \dot{x} > 0 \\ -kx + \mu mg, & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

Приведём к уравнениям гармонических осцилляторов:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{k}{m}\left(x + \dfrac{\mu m g}{k}\right) = 0\,, & \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} + \dfrac{k}{m}\left(x - \dfrac{\mu m g}{k}\right) = 0\,. & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

Решения этих уравнений:

$$\begin{cases} x + \dfrac{\mu m g}{k} = A\cos(\omega t + \varphi_0)\,, & \dot{x} > 0 \\ x - \dfrac{\mu m g}{k} = A\cos(\omega t + \varphi_0)\,. & \dot{x} < 0 \end{cases}$$



Это обычные косинусоиды, сдвинутые по оси ординат. При движении бруска вправо косинусоида сдвинута в отрицательную сторону, при движении влево – в положительную (см. рис.).

При остановке бруска, сопровождающейся деформацией пружины $|\Delta x| < \dfrac{\mu m g}{k} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}6\ \text{кг} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{80 \frac{\text{Н}}{\text{м}}} \approx$ 0,022 м, брусок более не придёт в движение.

Итак, при каждой остановке, расстояние до точки равновесия уменьшается на 2,2 см. Запишем отклонения от точки равновесия:

Номер колебания	Отклонение вправо	Отклонение влево
1	10 см	7,8 см
2	5,6 см	3,4 см
3	1,2 см	-

Расстояние от стенки:

$$L = \Delta x + l_0 = 1{,}2\ \text{см} + 20\ \text{см} = 21{,}2\ \text{см}$$

Ответ: 21,2 см

Зависимость проекции силы трения от направления движения	+1 балл
II закон Ньютона в проекциях	+1 балл
Формула силы трения скольжения	+1 балл
Приведение к виду уравнения гармонического осциллятора	+2 балл
Анализ решений (сдвиг синусоиды)	+2 балла
Расчёт окончательного сдвига относительно положения равновесия	+2 балла
Верный ответ	+1 балл

5. На цилиндрический постоянный магнит длиной l и радиусом $r << l$ в однородном магнитном поле индукцией B может действовать максимальный момент сил M. Ток какой силы I, нужно пустить через цилиндрическую катушку тех же размеров, что и магнит, состоящую из $N >> 1$ витков тонкого провода, чтобы на неё в таком же магнитном поле мог действовать такой же магнитный момент? Каким бы был максимальный момент M^*, действующий на магнит, если бы его радиус и длина были больше в $n = 3$ раза?

<u>Решение:</u>

Максимальный момент действует на виток, если вектор магнитной индукции лежит в плоскости витков.

Механический момент, действующий на один виток

$$M_0 = BIS$$

Механический момент, действующий на N витков соленоида

$$M = NM_0 = BISN$$

Поскольку провод тонкий, катушку можно промоделировать соленоидом

$$M = IB\pi r^2 N \quad \rightarrow \quad I = \frac{M}{B\pi r^2 N}$$

Магнитные свойства тел возникает из-за обтекания тела молекулярными токами (гипотеза Ампера).

Можно представить постоянный магнит катушкой из большого числа витков с током

Поскольку атомы остаются теми же, сила тока не меняется.

При увеличении радиуса в n раз, площадь витков увеличивается в n^2 раз.

При увеличении длины цилиндра в n раз, число «витков» увеличивается также в n раз.

Таким образом, момент сил увеличивается в $n^3 = 27$ раз. $M^* = 27M$.

Ответ: $M^* = 27M$

Указано направление B для максимального момента	+1 балл
Формула для момента, действующего на виток с током	+1 балл
Формула для момента, действующего на соленоил с током	+1 балл
Моделирование катушки соленоидом с обоснованием	+1 балл
Гипотеза Ампера	+1 балл
Представление постоянного магнита катушкой из большого числа витков с током	+1 балл
Сила тока не изменяется (с обоснованием)	+1 балл
Изменение площади витков в n^2 раз	+1 балл
Изменение числа витков в n раз.	+1 балл
Механический момент M^*	+1 балл