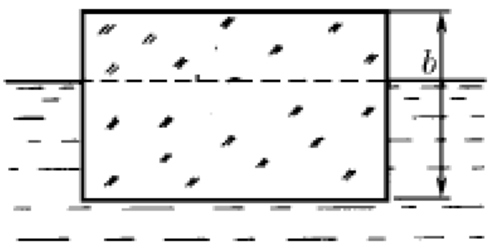
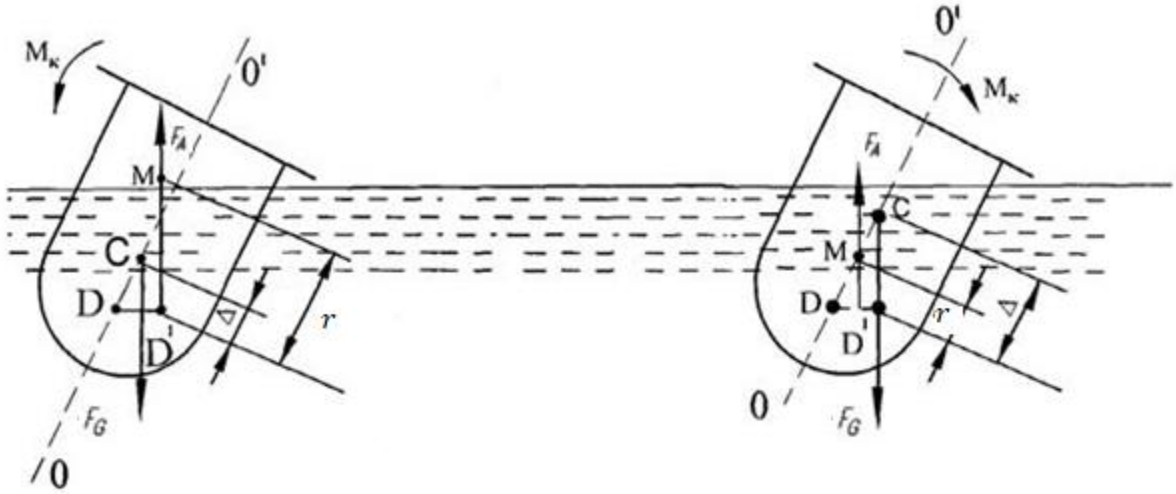
1. «Модель корабля»

В жидкости плотности ρ_0 плавает модель корабля в виде прямоугольного параллелепипеда из материала плотности ρ. Высота параллелепипеда b, ширина и длина a. Студент морского училища Гена знает, что при качке плавающего тела распределение погруженной в жидкость части меняется, из-за чего точка приложения силы Архимеда смещается. А ещё, у плавающих симметричных тел (как параллелепипед) при малых отклонениях от положения равновесия точка приложения силы Архимеда будет двигаться по дуге, центром которой является точка, называемая метацентрической. Зная формулу нахождения радиуса этой окружности, помогите Гене определить, при каком отношении a к b положение параллелепипеда будет устойчивым? $r = \frac{\frac{1}{12}a^4}{V_п}$, где $V_п$ – объём погруженной части.



Возможное решение:

1) В начале модель покоится, следовательно, сила Архимеда и тяжести скомпенсированы: $mg = \rho_0 g V_п => \rho b a^2 g = \rho_0 a^2 (b-h) g$, где h - высота части модели над поверхностью воды. Отсюда $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{b-h}{b} => h = b(1 - \frac{\rho}{\rho_0})$
2) Для того, чтобы модель находилась в равновесии, необходимо при малом отклонении от положения равновесия появление момента пары сил – силы тяжести и Архимеда, который будет возвращать тело в положение равновесия.
3) Метацентрическая точка М может находиться между точками приложения силы тяжести (С) и силы Архимеда (D). Если она находится выше центра масс, то равновесие судна устойчиво, так как момент пары сил всегда направлен в сторону, противоположную крену. Если нет, то момент ещё больше стремится вывести тело из состояния равновесия. Поэтому граничным условием для нахождения соотношения между сторонами модели будет: $r > \Delta$.



4) $\Delta = DC = \frac{b}{2} - \frac{b-h}{2} = \frac{h}{2} = \frac{b\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{2} => r > \frac{b\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{2} => \frac{\frac{1}{12}a^4}{a^2(b-h)} > \frac{b\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{2} => \frac{a^2}{b^2} > 6\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) => \frac{a}{b} > \sqrt{6\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}$
5)

Система оценивания задачи:

1) Из условия плавания тел найдена часть модели, находящаяся над водой – **2 балла**

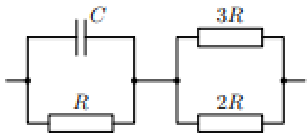
2) Указано, что для равновесия необходимо появление момента пары сил – силы тяжести и Архимеда, который будет возвращать тело в положение равновесия – **1 балл**
3) Показаны два принципиально разных положения метацентрической точки – при неустойчивом и устойчивом положении модели – **3 балла**
6) Найдено, что граничным условием для нахождения соотношения между сторонами модели будет: $r > \Delta$ - **2 балла**
4) Найдено соотношение сторон $\frac{a}{b}$ – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Схема»

Схема, показанная на рисунке, подключена к источнику постоянного напряжения. Сопротивление $R = 50$ Ом, ёмкость конденсатора равна $C = 20$ мкФ. После всех переходных процессов заряд на конденсаторе стал равен $q = 800$ мкКл.

Определите ток через резистор сопротивлением 3R, мощность, выделяющуюся на резисторе 2R и энергию, которая выделится в цепи, если источник отключить.



Возможное решение:

1) Напряжение на резисторе R равно $U_1 = U_C = \frac{q}{C}$
2) По закону Ома ток через резистор R равен $I = \frac{U_1}{R} = \frac{q}{RC}$
3) Ток в резисторах 3R и 2R делится в обратном соотношении => ток через 3R равен $I_3 = \frac{2}{5}I = \frac{2}{5}\frac{q}{RC} = 0{,}32$ А
4) Мощность на 2R оп определению равна $P_2 = U_2 I_2 = \frac{6}{5} * \frac{Rq}{RC} * \frac{3}{5} * \frac{q}{RC} = \frac{18}{25}\frac{q^2}{RC^2} = 23{,}04$ Вт
5) В цепи после отключения источника выделится энергия, накопленная в конденсаторе: $E = \frac{q^2}{2C} = 0{,}016$ Дж

Система оценивания задачи:

1) Найдено напряжение на конденсаторе – **1 балл**
2) Найден общий ток – **1 балл**
3) Найден ток через резистор 3R – **2 балла**
4) Найдена мощность на резисторе 2R – **3 балла**
5) Найдена энергия, выделившаяся в цепи – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Скорость…»

Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло расстояние s за время τ. Какую скорость имело тело в тот момент, когда оно прошло четверть этого расстояния?

Возможное решение:

1) Раз тело двигалось из состояния покоя с постоянным ускорением a, следовательно, $s = \frac{a\tau^2}{2}$
2) Ускорение тела равно $a = \frac{2s}{\tau^2}$
3) Четверть пути тело прошло за время t: $\frac{1}{4}s = \frac{at^2}{2} => t = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s}{a}} = \sqrt{\frac{\tau^2}{4}} = \frac{\tau}{2}$
4) $v = at = \frac{a\tau}{2}$

Система оценивания задачи:

1) Написано уравнение движения из п 1 – **3 балла**
2) Найдено ускорение – **2 балла**

3) Найдено врем, за которое пройдена четверть пути – **3 балла**
4) Найдена конечная скорость – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

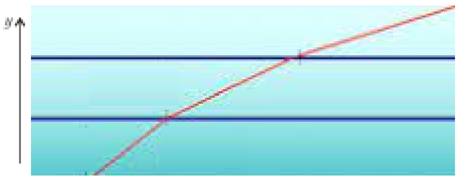
4. « Э-э-эксперименты »

На уроке в восьмом классе учитель показал детям явление диффузии в жидкостях, налив в аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда сначала дистиллированную воду, а потом подслащенную воду так, чтобы подслащенная вода оказалась снизу, а дистиллированная вода сверху. Через неделю после этого в аквариуме образовался промежуточный диффузный слой, который и показал школьникам данное явление.

На перемене пришел одиннадцатый класс, который недавно ходил на открытую лекцию по оптике, на которой ребятам показали прохождение луча в неоднородной среде. Оказалось, что свет изгибался, а не распространялся прямо. Учитель тут же решил показать это явление ещё раз. Взяв лазерную указку и пустив луч света в аквариум, народ заметил, что луч, войдя в диффузионный слой под углом 60° к вертикали выходит из него под углом 75° к вертикали.

Объясните,

1) Почему так происходит?
2) Считая диффузионный слой равномерно меняющимся и шириной 2,4 см, рассчитайте градиент k (быстроту изменения) показателя преломления, если показатель преломления дистиллированной воды равен $n_0 = \frac{4}{3}$.
3) Ещё через неделю диффузионный слой вырос вдвое, а градиент уменьшился втрое. Рассчитайте теоретически, сможет ли луч, пущенный под тем же углом, выйти из этого слоя в чистую воду?



Возможное решение:

1) Такой эффект наблюдается потому, что среда, в которой распространяется свет, неоднородная (показатель преломления меняется). Поэтому свет, преломляясь, меняет траекторию своего движения на кривую.
2) По закону преломления $n * sin\alpha = n_0 * sin\beta$, где $\alpha = 60°$, а $\beta = 75°$, n – показатель преломления подслащённой воды. Тогда показатель преломления подслащённой воды равен $n = n_0 * \frac{sin\beta}{sin\alpha} = 1{,}49$.
3) Отсюда градиент $k_1 = \frac{\Delta n}{\Delta y} = \frac{0{,}16}{2{,}4 \text{ см}} = 0{,}067 \text{ см}^{-1}$.
4) $k_2 = \frac{k_1}{3}$. Пусть луч не выйдет из диффузного слоя. Известно, что в диффузном слое абсолютный показатель преломления зависит от координаты так: $n(y) = n - k_2 y$, если за начало отсчёта брать нижнюю точку диффузного слоя. При этом $n(y) * sin\alpha_y = const$. Если луч не выйдет, то $\alpha_{h_{max}} = \frac{\pi}{2}$, где h_{max} – максимальная высота подъёма луча в слое.
5) $n * sin\alpha = n(h_{max}) * sin\alpha_{h_{max}} => sin\alpha = \frac{n - k_3 h_{max}}{n} => h_{max} = \frac{n}{k_3}(1 - sin\alpha) = \frac{1{,}49}{0{,}022}\text{см}(1 - 0{,}87) = 8{,}8$ см, что больше ширины слоя в 4,8 см => луч выйдет из диффузного слоя.

Система оценивания задачи:

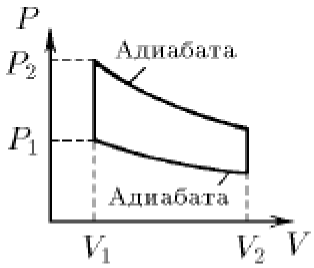
1) Объяснено возникновение такого эффекта – **2 балла**
2) Записан закон преломления – **2 балла**
3) Найден градиент из первого случая – **3 балла**
4) Так или иначе показано, что луч выйдет из диффузного слоя во втором случае – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «КПД тепловой машины»

Федя собрал дома тепловую машину и снял зависимость давления газа в его тепловой машине от объёма за цикл. Найдите КПД цикла машины Феди, изображённого на рисунке, если рабочим телом тепловой машины считается одноатомный идеальный газ. p_2, p_1, V_2 и V_1 даны.

Примечание: работу, совершённую газом в адиабатическом процессе можно посчитать по формуле $A_{12} = \frac{pV^\gamma}{\gamma-1}\left(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right)$, где γ – показатель адиабаты.



Возможное решение:

1) $\eta = \frac{A}{Q_н}$, где A – работа газа за цикл, $Q_н$ – количество теплоты, полученное газом от нагревателя.
2) $pV^\gamma = const = c$ – уравнение адиабаты. Для нижней адиабаты $p_1 {V_1}^\gamma = c_1$, а для верхней $p_2 {V_1}^\gamma = c_2$
3) $A = \frac{p_2 {V_1}^\gamma}{\gamma-1}\left(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right) - \frac{p_1 {V_1}^\gamma}{\gamma-1}\left(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right) = \frac{(p_2-p_1)}{\gamma-1} V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$, $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}$.
4) $Q_н = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)\, V_1$
5) Окончательно, $\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Система оценивания задачи:

1) Написано определение КПД – **1 балл**
2) Написано уравнение верхней и нижней адиабаты через данные давления и объём – **3 балла**
3) Найдена работа за цикл – **4 балла**
4) Найдено $Q_н$ – **1 балл**
5) Найдено КПД – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов