ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ
к задачам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по физике в 2023/2024 учебном году

11 класс

1. (10 баллов) Два тела бросили из одной точки над поверхностью земли с одинаковой по величине скоростью V_0, одно горизонтально, другое под углом α к горизонту. С какой высоты бросили тела, если они упали в одну точку на поверхности земли? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Высота равна $(2V_0^2 \text{ctg}^2\alpha)/g$.

Решение. Обозначим через h искомую высоту и введем оси x (горизонтальную) и y (направленную вертикально вверх) с началом в точке броска. Запишем координаты первого (брошенного горизонтально) тела в момент падения на землю t_1 в виде

$$x_1 = V_0 t_1, \qquad -h = -\frac{g t_1^2}{2},$$

откуда получим

$$x_1 = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Запишем координаты второго тела в момент t_2 его падения на землю

$$x_2 = V_0 \cos\alpha\, t_2, \qquad -h = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{g t_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Во втором уравнении в (1) учтено, что вертикальная компонента начальной скорости должна быть положительной. Действительно, второму телу из-за меньшей горизонтальной скорости нужно большее время полета, чтобы сместиться на то же расстояние в горизонтальном направлении. Из условия $x_1 = x_2$ выразим время t_2 в виде

$$t_2 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

и подставим во второе уравнение в (1). Получим уравнение

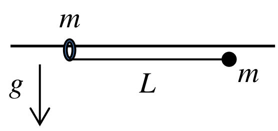
$$-h = V_0 \,\text{tg}\,\alpha \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{h}{\cos^2\alpha},$$

из которого находим искомую высоту

$$h = \frac{2V_0^2 \text{ctg}^2\alpha}{g}.$$

Разбалловка. Записаны формулы для x_1 и y_1 в момент падения – 2 балла.
Записаны формулы для x_2 и y_2 в момент падения – 2 балла.
Понято, что скорость второго тела направлена вверх – 1 балл.
Записано равенство $x_1 = x_2$ – 1 балл.
Составлено уравнение для h – 3 балла.
Найдена искомая высота – 1 балл.

2. (10 баллов) Шарик массы m скреплен нитью длины L с кольцом той же массы, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. Первоначально кольцо неподвижно, а шарик удерживают на уровне спицы так, что нить не провисает (см. рис.). Какую работу совершит над шариком сила натяжения нити к моменту, когда после освобождения шарика нить станет вертикальной? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Работа равна $-\frac{1}{2}mgL$.

Решение. По закону сохранения импульса скорости шарика и кольца будут равными по величине (и противоположными по направлению) в момент достижения шариком нижней точки (принятия нитью вертикального положения). Обозначив скорость в этот момент через V, запишем по закону сохранения механической энергии для системы шарик-кольцо

$$\frac{mV^2}{2}+\frac{mV^2}{2}=mgL.$$

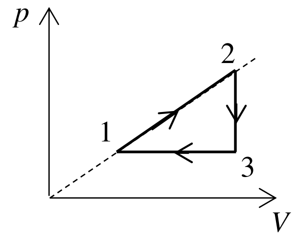
Работа силы натяжения нити над шариком равна изменению механической энергии шарика, т.е.

$$A=\frac{mV^2}{2}-mgL.$$

Используя первое соотношение, окончательно получаем

$$A=-\frac{1}{2}mgL.$$

Разбалловка. Получено равенство скоростей из закона сохранения импульса – 2 балла.
Записан закон сохранения энергии для системы шарик-кольцо – 2 балла.
Записано выражение для работы через изменение энергии – 4 балла.
Получен ответ – 2 балла.



3. (10 баллов) Одноатомный идеальный газ совершает циклический процесс, состоящий из прямолинейного участка 1-2, изохоры 2-3 и изобары 3-1 (см. рис.). Каким максимальным значением ограничен КПД цикла такого вида?

Ответ. КПД ограничен значением 25%.

Решение.

КПД теплового двигателя определяется формулой $\eta=A_{\text{ц}}/Q_{\text{п}}$, где $A_{\text{ц}}$ – работа газа за цикл, а $Q_{\text{п}}$ – полученное газом тепло. Работа газа может быть найдена как площадь треугольника

$$A_{\text{ц}}=\frac{1}{2}(p_2-p_1)(V_2-V_1)=\frac{1}{2}\alpha(V_2-V_1)^2,$$

где использована линейная зависимость давления от объема $p=\alpha V$ на наклонном участке цикла (гипотенузе треугольника), α – некоторый коэффициент, а через V_1 и V_2 обозначены объемы газа в точках 1 и 2.

Газ получает тепло только на участке 1-2. Согласно первому принципу термодинамики полученное тепло равно сумме работы газа A_{12} и приращения его внутренней энергии ΔU: $Q_{\text{п}}=A_{12}+\Delta U$. Работу газа на участке 1-2 находим через площадь трапеции

$$A_{12}=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)=\frac{1}{2}\alpha(V_2^2-V_1^2).$$

Изменение внутренней энергии газа записываем как

$$\Delta U=\frac{3}{2}R(T_2-T_1)=\frac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{3}{2}\alpha(V_2^2-V_1^2).$$

В итоге находим полученное тепло

$$Q_{\text{п}}=2\alpha(V_2^2-V_1^2)$$

и КПД цикла

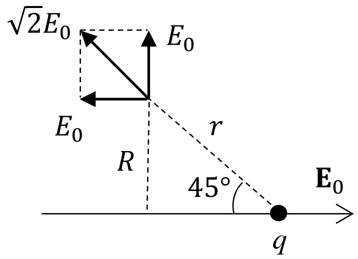
$$\eta=\frac{V_2/V_1-1}{4(V_2/V_1+1)}.$$

Из полученного выражения следует, что КПД стремится к максимальному значению $\eta=1/4$ при $V_2/V_1\to\infty$. Это и есть искомое предельное значение.

Разбалловка. Записана общая формула для КПД – 1 балл.
Записана работа газа за цикл через p и V – 1 балл.
Использована формула $p=\alpha V$ и
записано выражение для работы газа за цикл через объемы – 2 балла.
Записано выражение для A_{12} – 1 балл.
Записано выражение для ΔU – 1 балл.
Записано выражение для полученного тепла через объемы – 1 балл.
Получена формула для КПД через объемы – 1 балл.
Найден предельный КПД – 2 балла.

4. (10 баллов) Точечный заряд q внесли в однородное поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Найти радиус окружности, на которой полное электрическое поле перпендикулярно полю $\mathbf{E}_0$ и равно ему по величине.

Ответ. Радиус окружности равен $\sqrt{\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}E_0}}$, где ε_0 – электрическая постоянная.



Решение. Плоскость искомой окружности перпендикулярна силовой линии внешнего электрического поля $\mathbf{E}_0$, проходящей через заряд q (будем считать его положительным). В точках окружности поле заряда q имеет две компоненты: направленную против поля $\mathbf{E}_0$ и перпендикулярную полю $\mathbf{E}_0$ (см. рис.). Обе компоненты равны по величине E_0. Следовательно, полное поле заряда q в точках окружности равно по величине $\sqrt{2}E_0$, а направление из точки расположения заряда к точке окружности составляет угол 45° с силовой линией внешнего поля (см. рис.). Обозначив расстояние от заряда до окружности через r, запишем

$$k\frac{q}{r^2} = \sqrt{2}E_0,$$

где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, ε_0 – электрическая постоянная. Отсюда находим расстояние r:

$$r = \sqrt{\frac{kq}{\sqrt{2}E_0}}.$$

Учитывая, что радиус искомой окружности R выражается через r как $R = r\sin 45°$, получаем

$$R = \sqrt{\frac{kq}{2\sqrt{2}E_0}}.$$

При отрицательном заряде q окружность будет расположена справа от заряда, ее радиус будет таким же.

Разбалловка. Понято общее расположение окружности – 2 балла.
Указано, что поле на окружности равно $\sqrt{2}E_0$ – 2 балла.
Найдено расстояние от заряда до окружности – 2 балла.
Найдено направление на окружность – 2 балла.
Найден радиус окружности – 2 балла.

5. (10 баллов) К вбитому в стену гвоздю привязали на нитях длиной L два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания в близко расположенных и параллельных стене плоскостях, не задевая друг друга. Для возбуждения колебаний маятники отклонили от вертикали на небольшой угол θ_0 в противоположных направлениях, затем отпустили один из них, а когда тот достиг угла $\theta_0/2$, отпустили и второй. Каким будет максимальное расстояние между грузами в процессе колебаний? Через какое время после начала движения второго маятника это расстояние будет достигнуто в первый раз? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Максимальное расстояние равно $\sqrt{3}L\theta_0$ и в первый раз достигается через время $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g}}$ после начала движения второго маятника.

Решение. В силу малости углов отклонения маятников можно пренебречь смещением грузов по вертикали и считать, что они движутся вдоль горизонтальной оси x (направим ее в сторону отклонения маятника, начавшего движение первым). Зависимости от времени координат грузов можно записать в виде

$$x_1 = L\theta_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \qquad x_2 = -L\theta_0\cos\omega t,$$

где использовано примерное равенство $\sin\theta_0 \approx \theta_0$ и начальная фаза маятника, начавшего движение первым, подобрана такой, чтобы в момент $t = 0$ угол его отклонения равнялся $\theta_0/2$ (в этот момент другой маятник только начинает движение от положения максимального отклонения). Сначала грузы будут сближаться друг с другом: с момента $t = 0$ до момента $\omega t = \frac{\pi}{3}$, когда они окажутся в точке $x_1 = x_2 = -L\theta_0/2$. После этого расстояние между грузами станет увеличиваться до момента $\omega t = \frac{5\pi}{6}$, когда грузы окажутся на одинаковом расстоянии от положения равновесия ($x_1 = -\sqrt{3}L\theta_0/2$, $x_2 = \sqrt{3}L\theta_0/2$) и, следовательно, будут иметь одинаковые скорости. В этот момент скорость удаления грузов обратится в нуль, что означает достижение максимума расстояния между грузами. Это максимальное расстояние равно

$$x_2 - x_1 = \sqrt{3}L\theta_0.$$

Учитывая, что для математического маятника $\omega = \sqrt{g/L}$, находим момент достижения максимального расстояния

$$t = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Максимальное расстояние между грузами и момент его достижения могут быть также найдены исследованием функции $x_2 - x_1 = -L\theta_0\left[\cos\omega t + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$. Используя формулу для суммы косинусов, получаем

$$x_2 - x_1 = -2L\theta_0\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$

откуда следует, что максимальное значение функции равно $\sqrt{3}L\theta_0$ и в первый раз достигается при $\omega t = \frac{5\pi}{6}$.

Разбалловка. Записаны зависимости от времени углов или координат маятников – по 2 балла.
Найден момент достижения максимального расстояния – 3 балла.
Найдено максимальное расстояние – 3 балла.