Материалы для членов жюри

Время выполнения заданий –230 минут

Максимальное количество баллов –50

Задача №1 (10 баллов)

Алексей разработал экспериментальную установку для изучения подъема груза по наклонной плоскости под действием переменной силы $\vec{F}(t)$ (см. рисунок 1.1). Модуль силы, с которой он поднимал груз, зависел от времени по закону $F(t) = kt$, где коэффициент $k = 3$ Н/с. В начальный момент времени груз покоился. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. В таблице приведены значения ускорения груза в различные моменты времени. Определите момент времени t_0, в который груз начал своё движение. Чему были равны масса груза m и коэффициент трения μ между грузом и плоскостью?

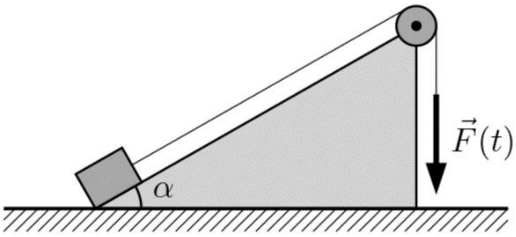


Рисунок 1.1.

t, с	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
a, м/с^2	0,0	0,0	0,0	0,0	1,5	4,5

Трос считать нерастяжимым и невесомым, блок невесомым, трение в блоке отсутствующим. Ускорение свободного падения принять за $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение:

Введем систему координат и покажем силы, действующие на груз (см. рисунок 1.2). Запишем второй закон Ньютона для груза:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

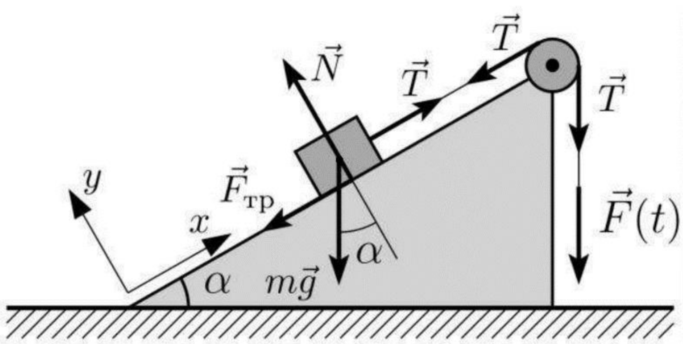


Рисунок 1.2.

В проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x: \; -mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} + T = ma; \\ y: \; \qquad -mg\cos\alpha + N = 0. \end{cases}$$

Так как блок и трос невесомы и отсутствуют силы трения в блоке, то сила натяжения троса равна приложенной силе: $T = F(t) = kt$. Тогда

$$a = \frac{k}{m}t - g\sin\alpha - \frac{F_{\text{тр}}}{m}.$$

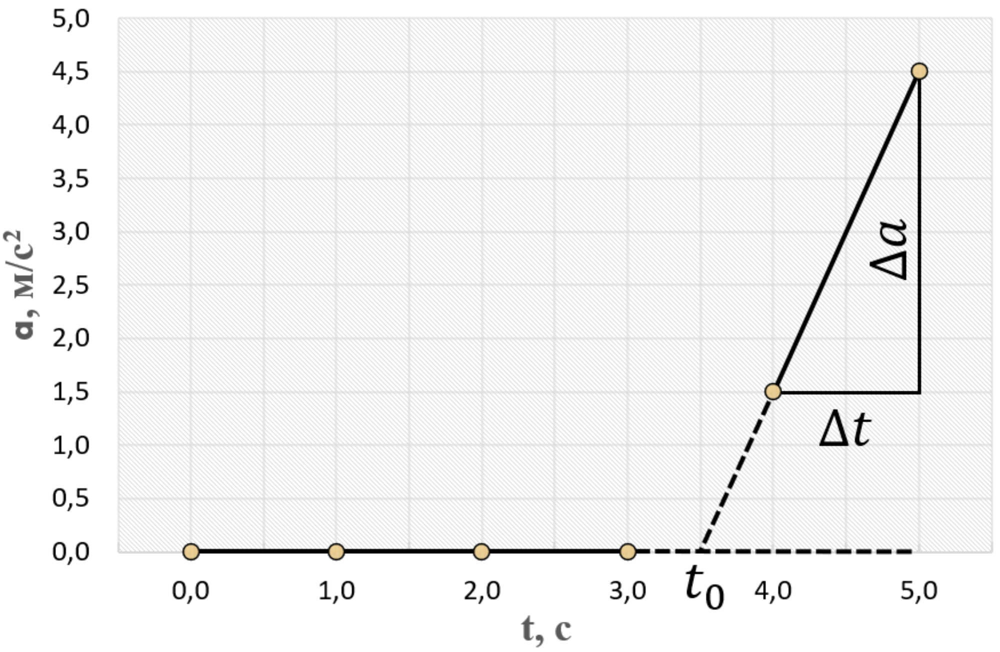
Сила трения будет выступать в качестве силы трения покоя до тех пор, пока груз не начнет движение. Для этого случая ускорение груза $a = 0$. В процессе движения груза: $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ – сила трения скольжения. Уравнение движения груза примет вид:

$$a = \frac{k}{m}t - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Заметим, что ускорение груза либо равно нулю, либо линейно зависит от времени.

1 вариант решения:

Для нахождения момента начала движения t_0 построим график зависимости $a(t)$ по данным таблицы.



Проведем прямые линии через точки на графике. Точка пересечения линий соответствует моменту начала движения $t_0 = 3{,}5$ с.

Найдем массу груза. Для этого рассмотрим участок линейного возрастания ускорения. Угловой коэффициент функции на этом участке равен k/m, для его нахождения найдем отношение изменения ускорения Δa к величине соответствующего интервала времени Δt:

$$\frac{k}{m} = \frac{\Delta a}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{k\Delta t}{\Delta a} = \frac{3 \cdot (5-4)}{4{,}5-1{,}5} = 1 \text{ кг.}$$

Коэффициент трения найдем из условия равенства нулю ускорения в момент t_0:

$$0 = \frac{k}{m}t_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

тогда

$$\mu = \frac{\frac{kt_0}{mg} - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3 \cdot 3{,}5}{1 \cdot 10} - \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 0{,}635.$$

2 вариант решения:

Также t_0, m и μ можно найти аналитически. Для этого рассмотрим ускорения груза в моменты времени $t_1 = 4$ с и $t_2 = 5$ с. Согласно таблице, они будут равны соответственно $a_1 = 1{,}5$ м/с^2 и $a_1 = 4{,}5$ м/с^2. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{k}{m}t_1 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha); \\ a_2 = \frac{k}{m}t_2 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем массу груза:

$$m = \frac{k(t_2 - t_1)}{a_2 - a_1} = \frac{3 \cdot (5-4)}{4{,}5-1{,}5} = 1 \text{ кг,}$$

и коэффициент трения:

$$\mu = \frac{a_2 t_1 - a_1 t_2}{g(t_2 - t_1)\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha = \frac{4{,}5 \cdot 4 - 1{,}5 \cdot 5}{10(5-4)\cos 30°} - \operatorname{tg} 30° = 0{,}635.$$

По этим значениям можно найти t_0:

$$0 = \frac{k}{m} t_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

откуда

$$t_0 = \frac{mg}{k}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = \frac{1 \cdot 10}{3}(\sin 30° + 0{,}635 \cdot \cos 30°) = 3{,}5 \text{ с}.$$

Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Правильно построен чертеж, указаны силы, действующие на груз	**1**
2	Дано объяснение равенства силы натяжения троса T и силы $F(t)$	**1**
3	Получено уравнение движения груза или зависимость $a(t)$	**2**
4	Получено выражение для момента начала движения t_0	**1**
5	Правильно вычислено значение момента начала движения t_0	**1**
6	Получено выражение для массы груза m	**1**
7	Правильно вычислено значение массы груза m	**1**
8	Получено выражение для коэффициента трения μ	**1**
9	Правильно вычислено значение коэффициента трения μ	**1**

Задача № 2 (10 баллов)

В термос с водой 100 °С опускают кусок льда при температуре 0 °С. При каком минимальном отношении масс льда и воды $x = \frac{m_л}{m_в}$ вода остынет до 0 °С? Найдите зависимость $t(x)$ и постройте её график, если t – температура равновесного термодинамического состояния, установившегося в термосе. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3\ \frac{Дж}{кг \cdot K}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5\ \frac{Дж}{кг}$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Возможное решение:

Составим уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \qquad (1)$$

где $Q_1 = \lambda m_л$ – количество теплоты, необходимое для плавления льда;

$Q_2 = cm_л(t - 0\ °\text{C}) = cm_л t$ – количество теплоты, затрачиваемое на нагрев воды, полученной изо льда;

$Q_3 = cm_в(t - 100\ °\text{C})$ – количество теплоты, выделяющееся при охлаждении воды.

$$\lambda m_л + cm_л t + cm_в(t - 100\ °\text{C}) = 0. \qquad (2)$$

Преобразуем уравнение (2):

$$c(m_л + m_в)t + \lambda m_л - 100cm_в = 0.$$

Поделим уравнение на $cm_в$ и введем переменную $x = \frac{m_л}{m_в}$:

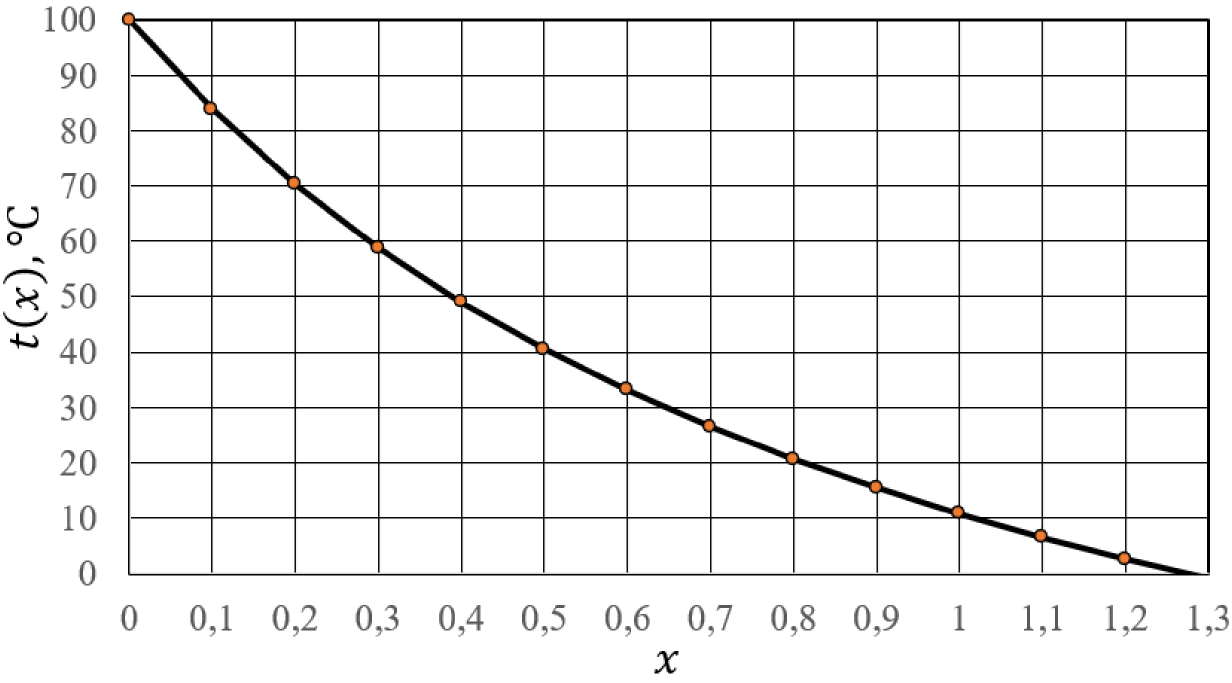
$$(x+1)t + \frac{\lambda}{c}x - 100 = 0.$$

Если $t = 0$, то $x = \frac{100c}{\lambda} = \frac{14}{11} = 1{,}27(27)$.

$$t(x) = \frac{100 - \frac{\lambda}{c}x}{1+x} = \frac{100 - \frac{\lambda}{c}x}{1+x}. \qquad (3)$$

Для построения графика сделаем расчет по формуле (3) для нескольких точек и построим таблицу.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$t(x)$, °C	100	70	49	33	21	11	3



Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Составлено уравнение теплового баланса (1)	**1**
2	Записана формула для нахождения Q_1	**1**
3	Записана формула для нахождения Q_2	**1**
4	Записана формула для нахождения Q_3	**1**
5	Вычислено минимальное $x = \frac{m_л}{m_в}$, при котором вода остынет до 0 °C	**1**
6	Получена зависимость $t(x)$	**2**
7	Правильно выбран масштаб графика	**1**
8	На графике отмечено более 5 точек (отмечено 3-5 точек – 0,5 баллов)	**1**
9	На графике подписаны оси	**0,5**
10	Присутствует таблица данных для графика	**0,5**

Задача № 3 (10 баллов)

Электрическая схема для исследования образования дуги при сварке состоит из элемента питания с постоянной ЭДС $\varepsilon = 220$ В, реостата и двух электродов, между которыми зажигается дуга. Вольт-амперная характеристика участка цепи, на котором зажигается дуга, описывается следующей формулой:

$$U_C = A + \frac{B}{I},$$

где A и B – положительные коэффициенты. Максимальное значение сопротивления реостата, выше которого дуга перестает зажигаться, составляет $R_{max} = 20$ Ом, а при «закороченном» реостате ($R_{min} = 0$) ток в цепи равен $I_0 = 2$ А. Нарисуйте электрическую схему и найдите значения коэффициентов A и B. Сопротивлением источника тока, проводов и электродов пренебречь.

Возможное решение:

Электрическая схема представляет собой последовательное соединение элементов цепи, так как при параллельном соединении напряжение на электродах было бы равно ЭДС источника тока и не зависело бы от сопротивления реостата (см. рисунок 3).

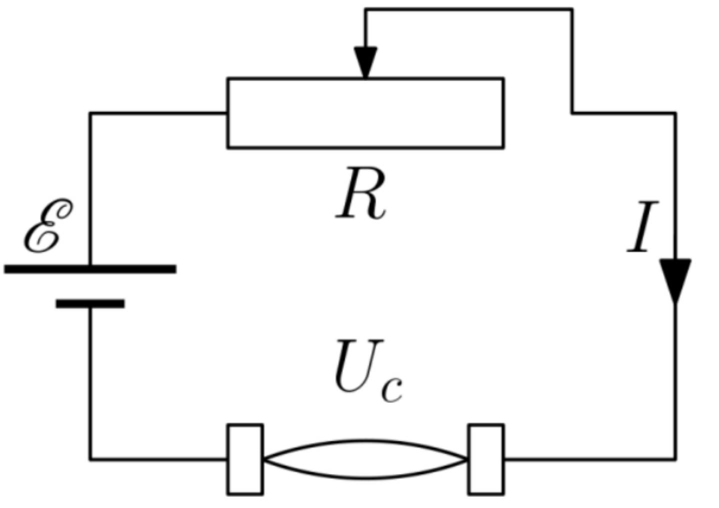


Рисунок 3.

Суммарное падение напряжения в цепи равно ЭДС источника тока:

$$\varepsilon = IR + U_C = IR + A + \frac{B}{I}. \qquad (1)$$

По условию, при «закороченном» реостате $R = R_{min} = 0$, тогда из уравнения (1) получим:

$$\varepsilon - A = \frac{B}{I_0}. \qquad (2)$$

Также из уравнения (1) получим квадратное уравнение:

$$I^2R - I(\varepsilon - A) + B = 0. \quad (3)$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения, используя выражение (2):

$$D = (\varepsilon - A)^2 - 4BR = \left(\frac{B}{I_0}\right)^2 - 4BR. \qquad (4)$$

Уравнение (3) имеет решение, когда $D \geq 0$, то есть, когда

$$R \leq \frac{B}{4I_0^2} = R_{max}, \quad (5)$$

откуда находим коэффициент $B = 4I_0^2R_{max} = 320$ Вт.

Из выражения (2) определим коэффициент A:

$$A = \varepsilon - \frac{B}{I_0} = 60 \text{ В}.$$

Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Электрическая схема составлена верно	**2**
2	Записано уравнение (1)	**1**
3	Получено уравнение (2) на коэффициенты A и B	**1**
4	Получено квадратное уравнение (3) для тока	**1**
5	Найдено выражение для дискриминанта (4)	**1**
6	Получено условие (5) для коэффициента B	**2**
7	Вычислено значение коэффициента B	**1**
8	Вычислено значение коэффициента A	**1**

Задача №4 (10 баллов)

По двум проводящим рельсам, соединенным последовательной LC-цепью, может перемещаться без трения проводящая перемычка массы m (см. рисунок 4). Перпендикулярно плоскости образованного контура создано однородное постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. В начальный момент времени конденсатор разряжают и перемычке сообщают скорость $\vec{v}_0$. Найти максимальную силу тока в цепи, если расстояние между рельсами равно d и контур расположен горизонтально. Емкость конденсатора равна C, индуктивность катушки L. Сопротивлением рельс и перемычки пренебречь.

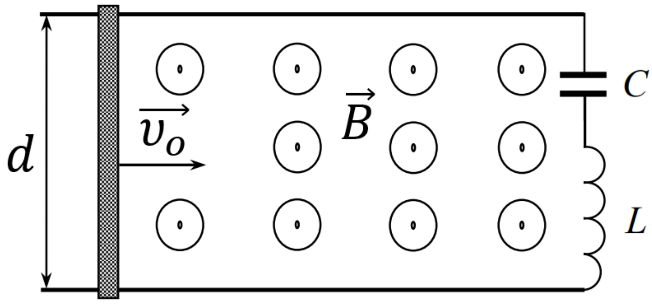


Рисунок 4.

Возможное решение:

ЭДС самоиндукции в катушке возникает при изменении силы тока $i(t)$ в цепи. В момент протекания в цепи максимального тока ЭДС самоиндукции равна нулю. В этот момент ЭДС индукции, возникающая в движущейся перемычке, равна напряжению на конденсаторе:

$$\varepsilon_i = B \cdot d \cdot v \sin 90° = B \cdot d \cdot v = U_C = \frac{q}{C}. \qquad (1)$$

При движении на перемычку будет действовать сила Ампера, направленная против направления движения. Тогда уравнение движения перемычки будет иметь вид:

$$F_A = i \cdot B \cdot d = -ma = -m\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Приращение заряда на конденсаторе за время Δt равно $\Delta q = i\Delta t$, тогда

$$\Delta q \cdot B \cdot d = -m\Delta v. \qquad (2)$$

Суммируя выражение (2) по времени от 0 до момента протекания максимального тока, получим:

$$q \cdot B \cdot d = m(v_0 - v). \qquad (3)$$

Поскольку в контуре отсутствует активное сопротивление, то будет выполняться закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \qquad (4)$$

Из выражений (1), (3) и (4) получим:

$$i_{max} = v_0 \cdot B \cdot d \sqrt{\frac{C \cdot m}{L \cdot (m + C(B \cdot d)^2)}}. \qquad (5)$$

Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Отмечено отсутствие ЭДС самоиндукции в момент протекания в цепи максимального тока.	**1**
2	Записано уравнение (1) для момента протекания максимального тока	**2**
3	Записано уравнение движения перемычки или уравнение (2)	**1**
4	Произведено суммирование уравнения (2) и получено уравнение (3)	**2**
5	Записан закон сохранения энергии (4)	**1**
6	Получено выражение (5) для максимальной силы тока	**3**

Задача №5 (10 баллов)

Луч падает под углом α на прозрачную плоскопараллельную пластинку и разделяется на два луча. Один луч отражается от внешней поверхности пластинки, а другой проходит внутрь пластинки, отражается от её внутренней поверхности и выходит наружу (см. рисунок 5.1). Определите расстояние между лучами Δ, если толщина пластинки равна d и её показатель преломления относительно внешней среды равен n.

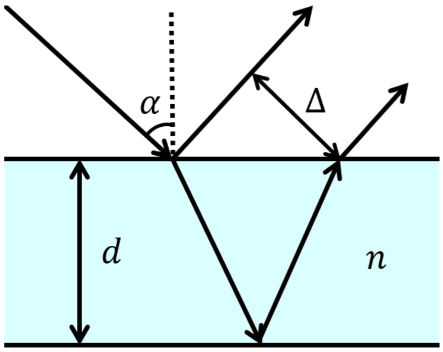


Рисунок 5.1.

Возможное решение:

Обозначим угол преломления второго луча β. Согласно закону отражения, углы отражения лучей равны углам падения. Опустим перпендикуляры в точках падения лучей (точки A, B, C) и обозначим углы α и β (см. рисунок 5.2).

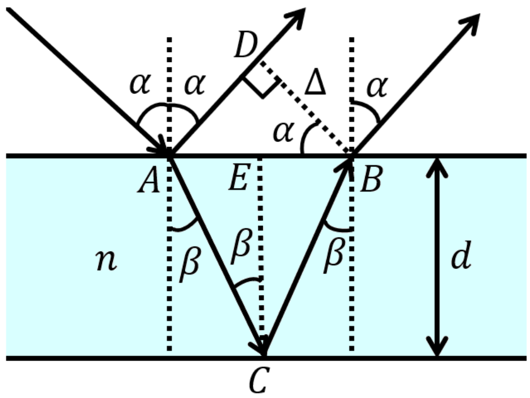


Рисунок 5.2.

Запишем закон преломления для второго луча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n. \qquad (1)$$

Закон преломления для второго луча при выходе из пластинки:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Если сравнить выражения (1) и (2), то видно, что $\gamma = \alpha$, то есть второй луч после преломления выходит из пластинки под углом α и параллелен первому лучу.

Согласно чертежу (треугольник ABD), расстояние между лучами Δ равно:

$$\Delta = BD = AB \cdot \cos\alpha = 2 \cdot AE \cdot \cos\alpha. \qquad (3)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACE и определим отрезок AE:

$$AE = d \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d \cdot \sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}. \qquad (4)$$

Используя выражения (1), (3), (4), получим

$$\Delta = \frac{2d \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{2d \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{n \cdot \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} = \frac{d \cdot \sin(2\alpha)}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Построен чертеж, на котором верно показан ход лучей	**1**
2	Указано равенство углов падения и отражения	**1**
3	Записан закон преломления (1)	**2**
4	Доказана параллельность первого и второго лучей (чертеж)	**1**
5	Записано выражение (3) для треугольника ABD	**1**
6	Записано выражение (4) для треугольника ACE	**1**
7	Получено итоговое выражение: $\Delta = \frac{d \cdot \sin(2\alpha)}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$	**3**