

Задания 11 класс с решениями

Задача 1. Трение на кнехте.

Для швартовки катера (удержания на канате) при его причаливании к пристани необходимо очень малое усилие. Брошенный с катера на пристань канат оборачивают два-три раза вокруг кнехта (тумбы, см. фото), и тогда оказывается достаточно приложить к свободному концу каната малую силу, чтобы проскальзывающий по кнехту канат остановил и удержал катер – то есть, с такой силой может тянуть ребенок. Найти, во сколько раз действующая на корабль со стороны каната сила превосходит приложенное к свободному концу каната усилие, если канат дважды обернут вокруг кнехта, а коэффициент трения каната о кнехт равен $\mu = 0,3$.



Возможное решение

Большой выигрыш в силе достигается благодаря трению витков каната о поверхность кнехта и между собой.

1. Рассмотрим небольшой элемент Δl витка каната на кнехте, изгиб которого соответствует центральному углу $\Delta\alpha$ (см. рис 1). На этот элемент со стороны соседних участков каната действуют упругие силы натяжения T и $T+\Delta T$,

направленные по касательным влево и вправо. Различие величин этих сил ΔT обусловлено действием на рассматриваемый элемент силы трения скольжения $\Delta F_{\text{тр}}$. Равнодействующая этих сил также имеет составляющую, направленную по радиусу к центру кнехта. Эта составляющая уравнивается перпендикулярной элементу Δl силой реакции кнехта ΔN , что видно на рис. 2 (учтено, что для малого элемента Δl витка отношение $\Delta T / T \ll 1$).

2. Поскольку угол $\Delta\alpha$ мал, справедливо приближение $\Delta N \approx T\Delta\alpha$ (1)

Величина силы трения скольжения $\Delta F_{\text{тр}} = \mu\Delta N$. (2)

Подставляя в (2) выражение для ΔN из (1), с учетом того, что $\Delta F_{\text{тр}} = \Delta T$, получаем: $\Delta T = \mu T\Delta\alpha$, или $\Delta T/\Delta\alpha = \mu T$ (3)

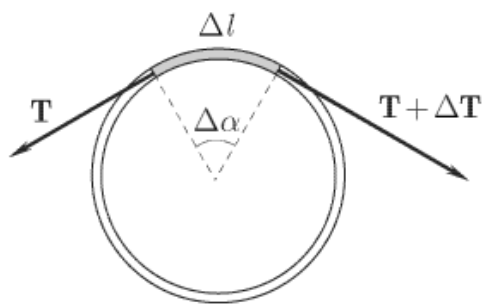


Рис. 1

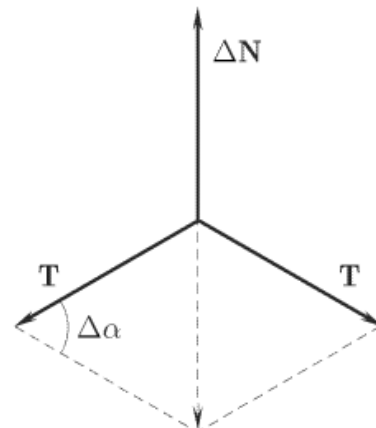


Рис. 2

3. Из курса математики известно, что если какая-то величина (в данном случае T) изменяется при изменении аргумента (здесь – угла α , на который опирается «одетая» канатом дуга) пропорционально себе самой, то соответствующая зависимость представляет собой экспоненциальную функцию:

$$T(\alpha) = C \cdot e^{\mu\alpha} \quad (4)$$

4. Постоянная C имеет смысл натяжения T_0 каната при $\alpha = 0$, т.е., усилия, приложенного к свободному концу каната. Поэтому окончательно

$$T(\alpha) = T_0 \cdot e^{\mu\alpha} \quad (5)$$

Из выражения (5) следует, что отношение натяжений на нагруженном и на свободном концах каната не зависит ни от диаметра каната, ни от толщины каната, а определяется только коэффициентом трения μ и числом

оборотов $n = \alpha/2\pi$. Сделаем расчет: $\frac{T}{T_0} = e^{\mu\alpha} = e^{2\pi n\mu} \approx 43,3$ (ответ)

За 1-й пункт – 3 балла

За 2-й пункт – 3 балла

За 3-й пункт – 2 балла

За 4-й пункт – 2 балла

! ВНИМАНИЕ! По этой и другим заданиям придерживаться правила: если задача не решена, но приведены некоторые идеи по существу условия задачи, можно оценивать каждую задачу в 1 или 2 балла в качестве поощрения.

Задача № 2. Сосновый поплавок

К нижнему концу палочки, сделанной в форме цилиндра из древесины сосны, прикреплена стальная гайка. Эта конструкция плавает в воде в вертикальном положении, при этом палочка длиной $L = 20$ см и сечением $S = 2$ см² погружена в воду наполовину. По палочке сверху аккуратно ударили, погрузив ее дополнительно на небольшую глубину. Через какое время Δt палочка впервые поднимется на максимальную высоту? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Возможное решение

1. Запишем уравнение равновесия конструкции, приняв ее массу равной m :
 $mg = F_{\text{арх}} = \rho V/2 = \rho SL/2$, где ρ – плотность воды, $V = SL$ – объем палочки.
Отсюда можно выразить массу конструкции: $m = \rho SL/(2g)$

2. При дополнительном погружении конструкции (далее, для краткости, будем говорить – «палочки») на малую глубину x возникнут гармонические колебания. Для получения уравнения этих колебаний запишем 2-й закон Ньютона для палочки: $ma = -\Delta F_{\text{Арх}} = -\rho g S x$, где $\Delta F_{\text{Арх}}$ – «избыточная» сила Архимеда, вызванная дополнительным погружением на величину x (x есть величина смещения палочки вниз), знак « $-$ » указывает на то, что сила направлена противоположно направлению смещения. Перепишем уравнение в виде $m x''(t) = -\rho g S x$, или $x'' + \frac{\rho g S}{m} x = 0$

Теперь мы имеем дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, в котором коэффициент при x есть квадрат циклической частоты колебаний (ω^2).

3. Имеем: $\omega^2 = \frac{\rho g S}{m} = \frac{\rho g S}{\rho S L / 2} = \frac{2g}{L}$ (здесь подставлено выражение для массы

из п.1). Тогда $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$, и период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$

4. Палочка начнет двигаться вверх и максимальная высота всплытия будет ею достигнута через промежуток времени, равный половине периода. Т.е.,

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2 L}{2g}} \approx \sqrt{\frac{10 \cdot 0,2}{2 \cdot 10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,32 \text{ с.}$$

(ответ)

Критерии оценивания

За 1-й пункт – 2 балла

За 2-й пункт – 4 балла

За 3-й пункт – 2 балла

За 4-й пункт – 2 балла

Участник может решить задачу, представляя избыточную архимедову силу как упругую силу, согласно закону Гука, ($-kx$), где k – некоторая «жесткость среды» ($k = \rho g S$), и далее использовать формулу для периода колебаний груза

на пружине, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. В этом случае оценка может быть снижена на 1 балл (при условии правильных преобразований и вычисления) только в том случае, если аналогия с колебаниями груза на пружине вводится просто формулами, без пояснений.

Задача № 3. Умная щеколда

Одиннадцатиклассник Макс, участвуя в конкурсной программе «Умный дом», предложил следующий проект. В некоторых домах люди запирают ворота изнутри на щеколду. Ценность этого простого механического приспособления (см. рис) в том, что с его помощью нельзя по забывчивости, уходя, закрыть ворота «от себя самого» – щеколдой можно зафиксировать ворота только изнутри, т.е., тогда, когда кто-то из жильцов дома. Но это создает неудобства другим обитателям дома – им необходимо звонить, если ворота изнутри закрыты.



Макс предложил электротепловой открыватель щеколды. Отодвигать щеколду можно снаружи нажатием определенной комбинации кнопок, приводящим к запуску поршня в трубке. Этот поршень отталкивает щеколду. В горизонтально расположенной теплоизолированной цилиндрической трубке под поршнем массой $m = 250$ г находится аргон. В закрытом торце трубки расположена нагревательная пластина, полезная мощность которой равна P .

Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, площадь поперечного сечения поршня $S = 2$ см², коэффициент трения поршня о стенки трубки $\mu = 0,5$. Сила трения, действующая на саму щеколду при ее перемещении, $f = 2$ Н. Найти мощность нагревателя P , если скорость, с которой начинает двигаться поршень при включении нагревателя, равна $v = 1$ см/с. Весу какой массы соответствует при этом сила,двигающая поршень? Ответы выразить в СИ, округлить до десятых.

Возможное решение

1. На поршень снаружи действуют собственная сила трения μmg , сила трения щеколды f , и сила атмосферного давления $p_0 S$; изнутри – сила давления нагреваемого газа pS . Если поршень движется с постоянной скоростью, силы уравниваются:

$$\mu mg + p_0 S + f = pS, \text{ откуда давление } p = \frac{\mu mg + p_0 S + f}{S}$$

2. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты, полученное газом от нагревателя, идет на изменение внутренней энергии газа и совершение им работы A : $Q = \Delta U + A$. Приняв процесс изобарным, выразим работу: $A = p\Delta V$. Поскольку для аргона – одноатомного газа

$$\Delta U = 1,5\nu R\Delta T = 1,5 p\Delta V, \text{ количество теплоты } Q = 2,5 p\Delta V.$$

3. Работа нагревателя $A_{\text{нагр}} = Pt$. Изменение объема газа при нагревании

$$\Delta V = l \cdot S = Sv \cdot t.$$

4. Из закона сохранения энергии $A_{\text{нагр}} = Q$, т.е. $Pt = 2,5 p\Delta V = 2,5 pSv$;

$$P = \frac{5(\mu mg + p_0 S + f)}{2S} Sv, \text{ откуда } 2P = 5v(\mu mg + p_0 S), \text{ и}$$

$$P = 2,5 \cdot v(p_0 S + \mu mg + f) = 2,5 \cdot 10^{-2} (10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 0,5 \cdot 0,25 \cdot 10 + 2) \approx 0,6 \text{ Вт}$$

Поскольку мощность есть произведение силы на мгновенную скорость,

$P = F \cdot v$, получаем, что $F = P/v = 0,6/0,01 = 60$ Н, что соответствует весу груза массы $M = 6$ кг. **(ответ)**

Критерии оценивания

За 1-й пункт – 3 балла

За 2-й пункт – 2 балла

За 3-й пункт – 2 балла

За 4-й пункт – 3 балла

Задача № 4. Явление электромагнитной индукции в диэлектрике

На гладкой горизонтальной неполяризуемой поверхности демонстрационного стола лежит заряженное пластиковое колечко массой $m = 2$ г. На стол вертикально ставят катушку индуктивности так, что колечко оказывается в центре основания катушки. Катушку подключают к источнику тока через реостат и равномерно увеличивают силу тока. При этом индукция магнитного поля возрастает от 0 до значения $B = 0,5$ Тл. Колечко начинает вращаться; при указанном значении индукции его угловая скорость становится равной $0,05$ рад/с. Найти заряд колечка q . Выразить его в мКл. Краевыми эффектами пренебречь.

Возможное решение

1. Причиной вращения колечка является эффект возникновения в диэлектрике индукционного вихревого электрического поля с круговыми (ориентированными в каждой точке колечка вдоль него) линиями напряженности. Электрические силы, действующие на каждый элемент колечка, направлены по касательной к нему. Изменение кинетической энергии колечка за время Δt равно работе, совершаемой этими силами. Если угловая скорость колечка равна ω , то за время Δt оно поворачивается на угол $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. При этом повороте по контуру проходит заряд Δq , которым обладает участок длины $R\Delta\varphi$ (R – радиус колечка). Так как заряд единицы длины колечка равен

$$q/(2\pi R), \text{ то } \Delta q = \frac{R\Delta\varphi \cdot q}{2\pi R} = \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot q}{2\pi}$$

2. Работа, совершаемая при повороте колечка, равна произведению заряда Δq и ЭДС индукции ε , возбуждаемой в контуре, ограниченном колечком:

$$A = |\varepsilon| \cdot \Delta q = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| \cdot \Delta q = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \frac{\pi R^2 \cdot \Delta B}{\Delta t} \right| \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot q$$

3. Кинетическая энергия колечка за это же время меняется на величину

$$\Delta W = \frac{1}{2} m(v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} m v^2 \approx m v \Delta v = m \omega R (R \Delta \omega) = m \omega R^2 \Delta \omega.$$

4. Приравнявая A и ΔW , получаем

$$\frac{1}{2} R^2 \omega q \Delta B = m \omega R^2 \Delta \omega, \text{ откуда } \Delta \omega = \frac{1}{2} q \Delta B / m.$$

При $\Delta B = B$ угловая скорость колечка становится равной ω : $\omega = qB / (2m)$.

5. Отсюда $q = \frac{2m\omega}{B} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} = 0,4 \text{ мКл}$

(ответ)

Критерии оценивания

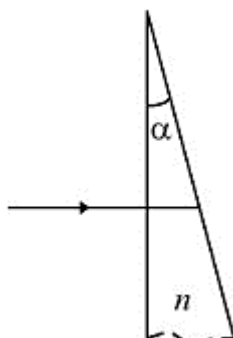
За 1-й пункт – 3 балла, за 2-й пункт – 2 балла

За 3-й пункт – 2 балла, за 4-й пункт – 2 балла

За 5-й пункт – 1 балл

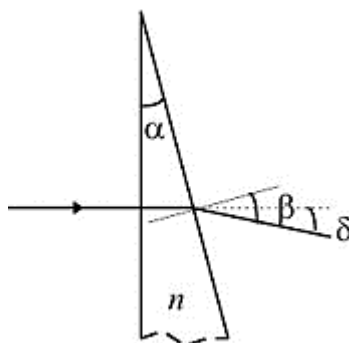
Задача 5. Луч света в призме.

Луч света падает из воздуха нормально на боковую грань призмы с преломляющим углом $\alpha = 20^\circ$ (см. рис). Найдите угол δ отклонения луча от своего первоначального направления при выходе из призмы, если внутри призмы он падает на вторую боковую грань. Абсолютный показатель преломления стекла принять $n = 1,6$.



Возможное решение

1. Построим дальнейший ход луча (см. рис. ниже). Угол падения луча на вторую боковую грань призмы равен преломляющему углу призмы α .



2. Запишем закон преломления для луча на этой грани:
$$n \sin \alpha = \sin \beta, \quad \text{где } \beta \text{ – угол преломления.}$$
3. Искомый угол δ отклонения луча $\delta = \beta - \alpha = \arcsin (n \sin \alpha) - \alpha$
4. Вычислим угол: $\delta \approx \arcsin (1,6 \cdot 0,342) - 20^\circ \approx 33^\circ - 20^\circ = 13^\circ$

(ответ)

Критерии оценивания - за 1-й пункт – 3 балла, за 2-й пункт – 2 балла, за 3-й пункт – 3 балла, за 4-й пункт – 2 балла

Если участник записывает закон преломления в виде $\sin \alpha / \sin \beta = n$, максимальная оценка по задаче не может быть выше 4 баллов.