

### Задача №11-Е1. Немокрая вода

Положим на весы шприц объемом 10 мл, обнулим показания весов. Перельем «сухую воду» из бутылки в баночку. Наберем из баночки в шприц объем  $V = (9,8 \pm 0,1)$  мл жидкости. Положим шприц на весы и запишем их показания  $m = (15,94 \pm 0,16)$  г. Выльем сухую воду в баночку. Рассчитаем плотность жидкости:

$$\rho = \frac{m}{V} = (1,63 \pm 0,03) \text{ г/см}^3 \quad (5)$$

Погрешность полученного значения рассчитаем через сумму относительных погрешностей измеренных массы и объема:

$$\sigma_\rho = \rho \left( \frac{\sigma_m}{m} + \frac{\sigma_V}{V} \right) = 0,03 \text{ г/см}^3. \quad (6)$$

Измерим площадь поперечного сечения толстой силиконовой трубки. Для этого наберем в шприц объемом 1 мл воду. Наденем на шприц трубку. Вытолкнем часть воды из шприца в трубку и сделаем отметку на трубке. Запишем значение объема воды в шприце  $v_{16} = (0,96 \pm 0,01)$  мл. Надавим на поршень шприца так, чтобы большая часть воды из шприца переместилась в трубку. Сделаем еще одну отметку на трубке в месте положения мениска. Запишем конечное значение объема воды в шприце  $v_{26} = (0,12 \pm 0,01)$  мл. Измерим расстояние между отметками на трубке  $l_6 = (11,5 \pm 0,1)$  см. Рассчитаем сечение трубки:

$$s_6 = \frac{v_{16} - v_{26}}{l_6} = (7,30 \pm 0,24) \text{ мм}^2. \quad (7)$$

Погрешность полученного значения рассчитаем через сумму относительных погрешностей объема воды в трубке и длины ее столба:

$$\sigma_{s_6} = s_6 \left( \frac{2\sigma_v}{v_{16} - v_{26}} + \frac{\sigma_{l_6}}{l_6} \right) = 0,24 \text{ мм}^2. \quad (8)$$

Наберем в шприц объемом 10 мл воду. Наденем на носик шприца трубку. Нажмем на поршень шприца, чтобы часть воды оказалась в трубке. Также запишем объем воды в шприце  $V_0 = (10,5 \pm 0,2)$  мл. Нальем холодную воду в мерный цилиндр. Измерим ее температуру  $T_{cw} = (18,8 \pm 0,3)^\circ\text{C}$ . Поместим в воду шприц, подвесив его за трубку в лапке штатива. Через некоторое время мениск в трубке перестанет передвигаться. Отметим местоположение мениска в трубке ручкой. Вынем шприц из воды. Выльем часть холодной воды из мерного цилиндра и добавим горячую воду в таком количестве, чтобы температура смеси была около  $30^\circ\text{C}$ . Измерим температуру воды  $T_{hw} = (31,8 \pm 0,3)^\circ\text{C}$  термометром. Поместим в воду шприц и вновь дождемся момента, когда мениск воды в трубке перестанет двигаться. Видно, что с учетом точности измерений мениск практически не сдвинулся. Последнее означает, что объем внутри шприца из-за расширения пластика

увеличился примерно также, как и объем воды. То есть объемные коэффициенты расширения шприца и воды в пределах точности эксперимента одинаковы. В указанном диапазоне температур этот коэффициент можно рассчитать, зная значения плотности воды в указанном диапазоне температур:

$$\beta_{\text{воды}} = \frac{\Delta\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}(T_{40} - T_{20})} = 0,35 \cdot 10^{-3}. \quad (9)$$

Проведем аналогичный опыт с «сухой водой», заполним шприц тем же объемом, чтобы изменение объема шприца происходило аналогичным образом. В результате опыта при изменении температуры жидкости от  $T_{cn} = (16,8 \pm 0,3)^{\circ}\text{C}$  до  $T_{hn} = (35,0 \pm 0,3)^{\circ}\text{C}$  мениск переместился в сторону от носика на расстояние  $l_n = (4,4 \pm 0,1)$  см.

Запишем геометрические соотношения для объемов в данном случае:

$$l_n s = (\beta - \beta_{\text{воды}}) V_0 (T_{hn} - T_{cn}), \quad (10)$$

откуда для коэффициента объемного расширения жидкости имеем:

$$\beta = \frac{l_n s}{(T_{hn} - T_{cn}) V_0} + \beta_{\text{воды}} = (2,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \quad (11)$$

Рассчитаем погрешность измеренной величины:

$$\sigma_{\beta} = (\beta - \beta_{\text{воды}}) \left( \frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_{l_n}}{l_n} + \frac{2\sigma_T}{T_{hn} - T_{cn}} \right) = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \quad (12)$$

Табличное значение составляет  $\beta_{\text{табл}} = 1,84 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Наберем в шприц объемом 1 мл воду. Наденем на кончик шприца розовую иглу, на которую в свою очередь наденем силиконовую трубку. Нажмем на поршень шприца, выдавив в трубку небольшое количество воды. Отметим на трубке ручкой положение мениска воды. Запишем объем воды в шприце в этот момент  $v_1 = (0,98 \pm 0,01)$  мл. Протолкнем воду в трубке практически до конца трубки. Сделаем вторую отметку на трубке. Запишем значение объема воды в шприце в этом случае  $v_2 = (0,50 \pm 0,01)$  мл. Измерим линейкой расстояние  $l = (59,3 \pm 0,2)$  мм между отметками на трубке. Рассчитаем площадь поперечного сечения трубки:

$$s = \frac{v_1 - v_2}{l} = (0,81 \pm 0,04) \text{ мм}^2 \quad (13)$$

Погрешность полученного значения рассчитаем через сумму относительных погрешностей объема воды в трубке и длины ее столба:

$$\sigma_s = s \left( \frac{2\sigma_v}{v_1 - v_2} + \frac{\sigma_l}{l} \right) = 0,04 \text{ мм}^2. \quad (14)$$

В этой части работы будем использовать шприц объемом 10 мл. Измерим линейкой высоту  $H = (5,7 \pm 0,1)$  см, соответствующую  $V_{10} = (10,0 \pm 0,2)$  мл его шкалы. Соберем установку, изображенную на рисунке 1. Для этого нальем сухую воду в баночку. В крышку банки вставим один конец трубки. Наберем в шприц «сухую воду». Подсоединим к шприцу с помощью розовой иглы силиконовую трубку. Закрепим шприц в штативе так, чтобы высота начала шкалы была немного выше уровня конца трубки, вставленного в банку. Выдернем поршень из шприца, после чего жидкость начнет движение по трубке. Измерим зависимость  $V(t)$  объема жидкости в шприце от времени.

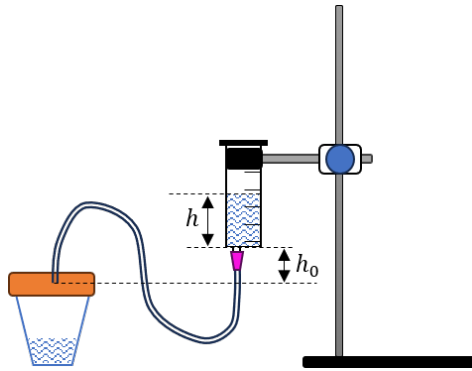


Рис. 1. Установка для измерения вязкости жидкости

После снятия зависимости измерим разность высот начала шкалы шприца и конца силиконовой трубки, вставленного в банку  $h_0 = (1,2 \pm 0,2)$  см. Разница давлений на концах силиконовой трубки определяется высотой  $h$  столба жидкости в шприце:

$$h = V \frac{H}{V_{10}}. \quad (15)$$

Тогда, согласно формуле Пуазейля, для объемного потока жидкости можно записать:

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{s^2 \rho g \left( V \frac{H}{V_{10}} + h_0 \right)}{8\pi\eta l}. \quad (16)$$

Разделим переменные:

$$\frac{dV}{V \frac{H}{V_{10}} + h_0} = - \frac{s^2 \rho g dt}{8\pi\eta l}. \quad (17)$$

И проинтегрируем:

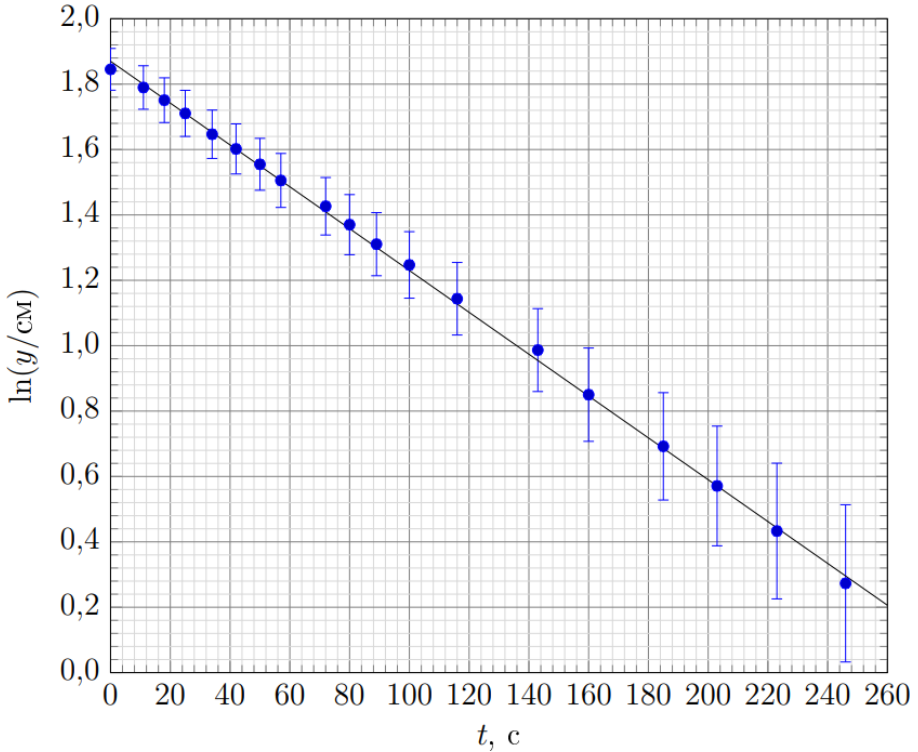
$$\ln \left( V \frac{H}{V_{10}} + h_0 \right) = - \frac{H s^2 \rho g t}{8V_{10}\pi\eta l} + \text{const}. \quad (18)$$

Введем для удобства величину  $y = V \frac{H}{V_{10}} + h_0$  (суть которой в движущей силе жидкости в трубке). Рассчитаем величину  $\ln y$  в таблице. Построим график зависимости  $\ln y(t)$ .

Погрешность времени примем равной  $\sigma_t = 1$  с. Абсолютная погрешность  $\ln y$  равна относительной погрешности  $y$ :

$$\sigma_{\ln y} = \frac{\sigma_{h_0} + V \frac{H}{V_{10}} \left( \frac{\sigma_V}{V} + \frac{\sigma_H}{H} \right)}{V \frac{H}{V_{10}} + h_0} \quad (19)$$

$t$ , с	$V$ , мл	$y$ , см	$\ln(y/\text{см})$	$\sigma_{\ln(y/\text{см})}$
0	9,0	6,3	1,85	0,06
11	8,4	6,0	1,79	0,07
18	8,0	5,8	1,75	0,07
25	7,6	5,5	1,71	0,07
34	7,0	5,2	1,65	0,07
42	6,6	5,0	1,60	0,08
50	6,2	4,7	1,55	0,08
57	5,8	4,5	1,51	0,08
72	5,2	4,2	1,43	0,09
80	4,8	3,9	1,37	0,09
89	4,4	3,7	1,31	0,10
100	4,0	3,5	1,25	0,10
116	3,4	3,1	1,14	0,11
143	2,6	2,7	0,99	0,13
160	2,0	2,3	0,85	0,14
185	1,4	2,0	0,69	0,16
203	1,0	1,8	0,57	0,18
223	0,6	1,5	0,43	0,21
246	0,2	1,3	0,27	0,24



Видно, что экспериментальные точки на графике хорошо описываются линейной функцией с модулем углового коэффициента:

$$k = \frac{Hs^2\rho g}{8V_{10}\pi\eta l} = (6,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (20)$$

Измерим полную длину силиконовой трубки  $l = (63,5 \pm 1,0)$  см. Погрешность здесь оценим в  $\sigma_l = 1,0$  см, так как игла имеет примерно такую длину, и ее гидродинамическое сопротивление неизвестно. Рассчитаем на основе полученных данных динамическую вязкость жидкости:

$$\eta = \frac{Hs^2\rho g}{8V_{10}\pi k l} = (5,8 \pm 1,2) \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}. \quad (21)$$

Погрешность полученного значения оценим, сложив относительные погрешности, входящих в формулу величин:

$$\sigma_\eta = \eta \left( \frac{\sigma_H}{H} + \frac{2\sigma_s}{s} + \frac{\sigma_\rho}{\rho} + \frac{\sigma_k}{k} + \frac{\sigma_l}{l} \right) = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}. \quad (22)$$

Табличное значение динамической вязкости, полученное через произведение кинематической вязкости  $\nu$  и плотности жидкости, для температуры в  $25^\circ\text{C}$  составляет:

$$\eta_{\text{табл}} = \nu \cdot \rho = 0,39 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с} = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Проверим, что движение жидкости в трубке является ламинарным. Для этого оценим число Рейнольдса для экспериментальной точки с максимальным объемным расходом.

$$\text{Re}_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} \rho}{D \eta} = \frac{(9 - 8,4) \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^3}{11 \cdot 5,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}} = 150 < \text{Re}_{\text{кр}}. \quad (23)$$

Для определения молярной массы жидкости необходимо узнать, сколько молей содержится в порции этого вещества определенной массы. Наиболее простой способ – превратить это вещество в газ при известных внешних параметрах: температура и давление. Поместим определенную порцию жидкости в сосуд под подвижный поршень, с противоположной стороны которого атмосферное давление, и начнем нагревать. При достижении температуры кипения давление паров жидкости достигнет атмосферного давления, и поршень придет в движение. Дальнейшее повышение температуры приведет к тому, что вся жидкость выкипит и получившийся газ расширится так, чтобы его давление сравнялось с атмосферным. В этом случае будут известными давление вещества, его объем и температура, по которым легко определить количество молей вещества в газообразном состоянии.

Реализуем идею на имеющемся оборудовании. В качестве сосуда с подвижным поршнем будем использовать шприц объемом 60 мл. В описанной выше теоретической модели важно, чтобы поршень имел небольшую силу трения о стенки шприца по сравнению с силой атмосферного давления. Для проверки этого параметра наберем в шприц  $V_{\text{нач}} = 60$  мл воздуха, заткнем пальцем носик шприца, нажмем на поршень, а затем отпустим его. Поршень начнет возвращаться обратно, через некоторое небольшое время поршень остановится примерно на отметке в  $V_{\text{кон}} = V_{\text{нач}} - \Delta V = 59$  мл. Можно ввести поправку на избыточное давление, связанное с трением поршня. В предположении о независимости силы трения в шприце от положения поршня давление в шприце, при движении поршня в сторону увеличения, объема будет равным:

$$p'_0 = p_0 \frac{V_{\text{нач}}}{V_{\text{кон}}} \approx p_0 + p_0 \frac{\Delta V}{V_{\text{нач}}} = p_0 + \Delta p_0 = (102 \pm 2) \text{ кПа}. \quad (24)$$

То есть будет больше атмосферного на величину  $\Delta p_0 = 2$  кПа. Погрешность давлений  $p_0$  и  $p'_0$  будем в дальнейшем принимать равным 2 кПа.

Переместим поршень шприца на отметку в 0 мл. Наденем на носик шприца резиновую пробочку. Положим шприц на весы и обнулим показания весов. Наберем в шприц объемом 1 мл приблизительно 0,2–0,3 мл «сухой воды». Проткнем иглой шприца резиновую пробочку и введем в большой шприц жидкость. Вытащим из пробочки иглу малого шприца и вновь положим большой шприц на весы. Показания весов  $m = (0,57 \pm 0,02)$  г будут равны массе «сухой воды» в большом шприце.

Нальем в мерный цилиндр горячую воду и опустим туда шприц, прижав его корпус к верхнему торцу цилиндра лапкой штатива. Если температура в цилиндре превышает температуру кипения, то жидкость в шприце достаточно быстро закипит, и поршень шприца придет в движение. Через некоторое время поршень шприца остановится и далее будет медленно опускаться с падением температуры внутри цилиндра. Будем считать, что в эти моменты газ в шприце и вода в мерном цилиндре находятся в тепловом равновесии, то есть их температуры равны. Измерим в этот момент объем газа в шприце  $V = (50,0 \pm 0,5)$  мл и температуру в мерном цилиндре  $T = (69,5 \pm 0,3)$  °C =  $(342,7 \pm 0,3)$  К.

Запишем закон Менделеева–Клапейрона для газа внутри шприца:

$$p'_0 V = \frac{m}{\mu} RT. \quad (25)$$

Откуда для молярной массы получаем:

$$\mu = \frac{m}{p'_0 V} RT = 319 \text{ г/моль}. \quad (26)$$

Систематическую погрешность значения оценим как сумму относительных погрешностей входящих величин:

$$\sigma_{\text{систематич.}\mu} = \mu \left( \frac{\sigma_m}{m} + \frac{\sigma_{p'_0}}{p'_0} + \frac{\sigma_V}{V} + \frac{\sigma_T}{T} \right) = 21 \text{ г/моль}. \quad (27)$$

Для того, чтобы убедиться в достоверности результата, можно провести эксперимент повторно.

$m$ , г	$V$ , мл	$T$ , °C	$\mu$ , г/моль
0,57	50,0	69,5	319
0,51	41,5	64,4	338
0,36	29,0	57,5	334

По полученным результатам оценим случайную погрешность полученных значений как  $\sigma_{\text{случ.}\mu} = 10$  г/моль. Окончательно для молярной массы имеем

$$\mu = (330 \pm 30) \text{ г/моль}$$

Табличное значение составляет  $\mu_{\text{табл}} = 316 \text{ г/моль}$ .

Для измерения давления насыщенного пара жидкости при температурах ниже температуры кипения необходимо, чтобы под поршнем шприца находился не только пар, но и воздух, так как давление паров меньше атмосферного. То есть тогда сумма давления воздуха  $p_{\text{в}}$  и давления насыщенного пара  $p_{\text{нп}}$  будет равна давлению  $p'_0$ :

$$p'_0 = p_{\text{нп}} + p_{\text{в}}. \quad (28)$$

Вынем поршень из большого шприца и подождем некоторое время. Продуем его и вставим поршень обратно, тем самым добившись того, что шприц будет заполнен только воздухом. Установим шприц на отметку  $V_0 = (30,0 \pm 0,5) \text{ мл}$  при атмосферном давлении и комнатной температуре  $T_0 = (22,2 \pm 0,3) \text{ }^\circ\text{C} = (295,4 \pm 0,3) \text{ К}$ . Закроем носик шприца пробкой. Проткнем пробку иглой шприца объемом 1 мл и введем приблизительно 0,3 мл «сухой воды» в шприц. Этого количества жидкости будет достаточно для того, чтобы в дальнейшем часть вещества оставалась в жидком состоянии, и пар был насыщенным. Вынем иглу малого шприца из пробки. Жидкость в шприце начнет испаряться, поршень начнет двигаться. Его движение прекратится, когда давление воздуха уменьшится до разности атмосферного давления и давления насыщенного пара жидкости. При испарении жидкость остывает, поэтому системе требуется некоторое время, чтобы прийти в тепловое равновесие с окружающей средой. Немного потрясем шприц так, чтобы жидкость омыла внутреннюю поверхность стенок шприца, и подождем время 5–10 мин, периодически отмечая положение поршня. Когда положение поршня перестанет меняться, запишем значение объема газа в шприце  $V_{\text{в}} = (49,0 \pm 0,5) \text{ мл}$ .

Давление воздуха в шприце легко рассчитать на основе закона Бойля–Мариотта:

$$p_{\text{в}} = p_0 \frac{V_0}{V}. \quad (29)$$

Давление пара выражается разностью давления  $p'_0$  и давления воздуха в шприце:

$$p_{\text{нп}} = p'_0 - p_0 \frac{V_0}{V} = p_0 \left( 1 - \frac{V_0}{V} \right) + \Delta p_0 = (40,8 \pm 2,4) \text{ кПа}. \quad (30)$$

Погрешность величины оценим как:

$$\sigma_{p_{\text{нп}}} = (p_{\text{нп}} - \Delta p_0) = \left( \frac{\sigma_{p_0}}{p_0} + \frac{V_0}{V} \left( \frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_V}{V} \right) \right) = 2,4 \text{ кПа}. \quad (31)$$



Выбор второй точки обусловлен двумя факторами: точностью измерений и удаленностью по температуре от комнатной температуры. Точка, отвечающая равенству давления паров атмосферному давлению, то есть соответствующая температуре кипения жидкости, удовлетворяет одновременно обоим условиям. Действительно, если выбрать другую точку, то погрешность измерения температуры будет определяться не только приборной погрешностью термометра, но и предположением о равенстве температур внутри шприца и окружающей его среды, ведь поместить термометр в закрытый шприц не представляется возможным. С другой стороны, при расчете давления в погрешность внесут вклад не только погрешность атмосферного давления, но и погрешности измерения объемов в шприце. Измерение же давления паров при более высоких температурах, чем температура кипения, с помощью данного оборудования крайне затруднительно.

Определить температуру кипения совсем несложно. Для этого нальем небольшое количество жидкости в банку и пустим баночку плавать в горячей воде. Жидкость через некоторое время закипит, ее температура при этом составит

$$T_{\text{кип}} = (50,8 \pm 0,3) \text{ } ^\circ\text{C} = (332,0 \pm 0,3) \text{ K}$$

Рассчитаем величину удельной теплоты парообразования жидкости:

$$L = \frac{R}{\mu} \frac{T_0 T_{\text{кип}}}{T_{\text{кип}} - T_0} \ln \frac{p_0}{p_{\text{нп}}} = (76 \pm 13) \text{ Дж/г.} \quad (32)$$

Погрешность величины оценим по следующей формуле:

$$\sigma_L = L \left( \frac{2\sigma_T}{T_{\text{кип}} - T_0} + \frac{\sigma_\mu}{\mu} + \frac{\frac{V_0}{V} \left( \frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_V}{V} \right)}{\left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \ln \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} \right) = 13 \text{ Дж/г.} \quad (33)$$

Табличное значение при температуре кипения ( $T_{\text{кип.табл.}} = 49,2^\circ\text{C}$ ) составляет  $L_{\text{табл}} = 88 \text{ Дж/г.}$

Наполним кювету жидкостью. На листе бумаги нарисуем достаточно контрастную точку. Поставим кюветы на лист бумаги так, чтобы точка оказалась под плоской частью дна кюветы. Если смотреть на боковую поверхность кюветы, то точка, расположенная под ее дном, видна не со всех ракурсов (см. рис. 2).

Свет, рассеянный точкой, распространяется внутри кюветы в соответствии с законом Снеллиуса внутри конуса с половинным углом раствора:

$$\alpha_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n}. \quad (34)$$

Лучи, попадая на боковую поверхность кюветы, выходят из нее преломляясь. При этом область видимости точки ограничена крайним лучем, который падает на боковую поверхность кюветы под углом  $(90^\circ - \alpha_{\text{кр}})$ . Преломляясь, этот луч

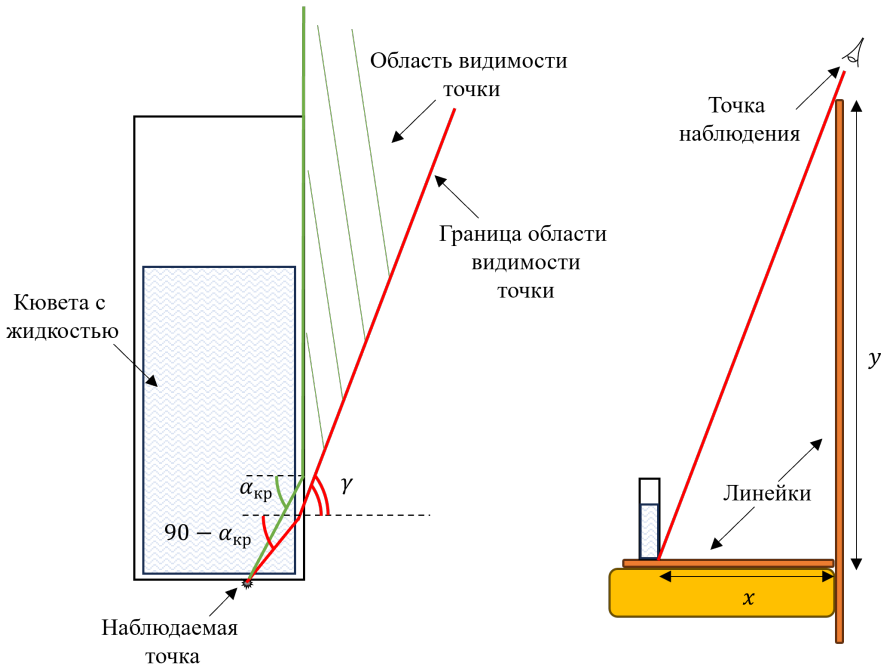


Рис. 2. Схема измерения показателя преломления жидкости

выходит из боковой поверхности кюветы под углом  $\gamma$ . Запишем закон преломления света для этого крайнего луча:

$$n \sin(90^\circ - \alpha_{\text{кр}}) = n \cos(\alpha_{\text{кр}}) = \sqrt{n^2 - 1} = \sin \gamma. \quad (35)$$

Таким образом для показателя преломления имеем:

$$n = \sqrt{1 + \sin^2 \gamma}. \quad (36)$$

Измерим этот угол с помощью линеек. Одной линейкой будем измерять горизонтальное расстояние между краем стола и кюветой, а другую прижмем к торцу столешницы в вертикальном положении. Найдем положение головы, при котором точка начинает исчезать. Подвинем верхний конец вертикальной линейки на линию наблюдения точки. Измерим расстояние между торцом стола и кюветой  $x = (36,1 \pm 0,2)$  см и расстояние между верхним торцом вертикальной линейки  $y = (45,5 \pm 1,0)$  см. Погрешность измерения вертикального расстояния оценим в

$\sigma_y = 1$  см из-за субъективности наблюдателя при суждении о пропадании и появлении точки, а также из-за того, что точно не определена точка выхода лучей из кюветы. Можем записать для угла преломления наблюдаемого луча:

$$\gamma = \arctan \frac{y}{x} = 51,6^\circ. \quad (37)$$

Систематическую погрешность оценим методом границ:

$$\sigma_{\text{сист.}\gamma} = \frac{\arctan \frac{y+\sigma_y}{x-\sigma_x} - \arctan \frac{y-\sigma_y}{x+\sigma_x}}{2} = 0,8^\circ. \quad (38)$$

Случайную погрешность  $\sigma_{\text{случ.}\gamma} \approx 2^\circ$  можно оценить, проведя опыты несколько раз для разных расстояний  $x$ . Тогда окончательно для угла преломления луча запишем  $\gamma = (51,6 \pm 3,0)^\circ$ .

Рассчитаем на основе полученного значения показатель преломления жидкости. Погрешность также оценим методом границ.

$$n = (1,27 \pm 0,02)$$

Заметим, что стенки кюветы на самом деле не вертикальны, однако более детальные расчеты показывают, что существенной ошибки в измерениях от этого не происходит. Табличное значение показателя преломления  $n_{\text{табл.}} = 1,264$ .

Данные, указанные в решении, получены на авторском оборудовании. Длины трубок и точность шкал шприцев могут быть отличным от выданного участникам олимпиады. Все диапазоны численных значений и погрешностей, по которым жюри будет оценивать работы, указаны в критериях оценивания. Табличные данные доступны по ссылкам:

- <https://multimedia.3m.com/mws/media/16264530/novec-1230-datasheet-ru-2018.pdf>
- <https://www.chemspider.com/Chemical-Structure.2062563.html>