

Районный этап всероссийской олимпиады школьников по физике
в 2023/2024 учебном году в Санкт-Петербурге
Возможные решения и критерии оценивания

7й класс 1-й вариант

Задача 1. Побелка забора

Тётя Полли отправила Тома Сойера белить деревянный забор длиной 30 ярдов и высотой 9 футов. Определите сколько килограмм известки потребуется Тому для побелки забора, если расход известки составляет 1 кг на 4 м^2 площади.

Ярд и фут – единицы длины в английской системе мер. Известно, что 1 ярд равен 3 футам, а 1 фут равен 0,3048 м. Забор нужно побелить только с одной стороны.

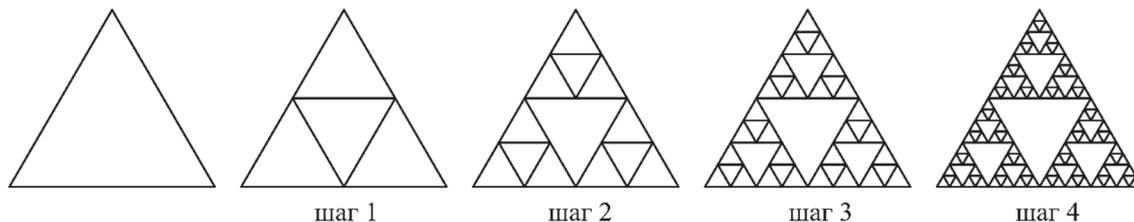
Возможное решение. Переведем размеры забора в систему СИ. Длина забора 30 ярдов = 90 футов = 27,4 м. Высота забора 9 футов = 2,74 м. Отсюда площадь забора равна $75,3 \text{ м}^2$.

Тогда для побелки забора потребуется $75,3/4 = 18,8$ кг известки.

Критерий	Баллы
Правильный перевод единиц Площадь забора равна 810 квадратных футов = $75,25 \text{ м}^2 \approx 75 \text{ м}^2$ Альтернативно расход известки 1 кг на 43 квадратных фута	5 баллов
Получен правильный ответ 18,8 кг или 19 кг известки	5 баллов

Задача 2. Фрактальная ёлочка

3D ручка позволяет создавать из быстро затвердевающего пластика линии одинаковой толщины. Перед Новым годом мальчик Вацлав решил при помощи 3D ручки нарисовать украшение в форме ёлочки. Вначале он нарисовал равносторонний треугольник, масса которого оказалась равна 8 г. Затем он соединил линиями середины сторон треугольника. На каждом следующем шаге Вацлав соединяет середины сторон маленьких треугольников, как показано на рисунке ниже. Какой будет масса ёлочки после четырех шагов?



Возможное решение. Заметим, что на каждом шаге ёлочка состоит из трех ёлочек на предыдущем шаге, размеры которых уменьшены в 2 раза. При уменьшении размера в 2 раза толщина линий остается неизменной, поэтому масса уменьшается как линейный размер, то есть в 2 раза. Тогда на каждом шаге масса ёлочки увеличивается в $3/2 = 1,5$ раза. Значит после 4х шагов масса ёлочки будет равна $8 \cdot 1,5^4 = 40,5$ г.

Критерий	Баллы
При уменьшении размера ёлочки в 2 раза масса уменьшается в 2 раза (если остальное сделано правильно, то ставится автоматически)	2 балла
Масса ёлочки на каждом шаге увеличивается в 1,5 раза (в этом пункте только оценивается идея, аккуратное доказательство не обязательно)	3 балла
Доказано, что масса ёлочки на каждом шаге увеличивается в 1,5 раза	2 балла
Получен правильный ответ 40,5 г	3 балла

Задача 3. Корона Гиерона

Древнегреческий царь Гиерон повелел придворному ювелиру изготовить корону массой $m = 1$ кг из чистого золота. Хитрый ювелир решил обмануть царя и вместо золотой короны сделал корону из сплава серебра и осмия, а затем покрыл её тончайшим, практически невесомым, слоем золота. При этом соотношение серебра и осмия в сплаве ювелир подобрал таким образом, чтобы средняя плотность короны была равна плотности золота. Известно, что 1 грамм осмия стоит в 5 раз дешевле 1 грамма золота, а 1 грамм серебра в 100 раз дешевле 1 грамма золота. Определите эквивалент стоимости короны в граммах золота.

Считайте плотность золота равной $\rho = 19,5$ г/см³, плотность серебра $\rho_1 = 10,5$ г/см³, плотность осмия $\rho_2 = 22,5$ г/см³. Считайте, что объем сплава серебра и осмия равен сумме исходных объемов серебра и осмия.

Возможное решение. Обозначим объем серебра V_1 , объем осмия V_2 . Тогда средняя плотность короны может быть выражена как

$$\frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \rho$$

Из условия равенства средней плотности короны и плотности золота выражаем отношение объемов

$$\rho_2 V_2 - \rho V_2 = \rho V_1 - \rho_1 V_1, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho}$$

Тогда отношение масс осмия и серебра равно $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = \frac{\rho_2 (\rho - \rho_1)}{\rho_1 (\rho_2 - \rho)}$

Суммарная масса равна массе короны, откуда получаем

$$m_1 = \frac{m}{\frac{m_2}{m_1} + 1} = \frac{m \rho_1 (\rho_2 - \rho)}{\rho (\rho_2 - \rho_1)} = 135 \text{ г}$$

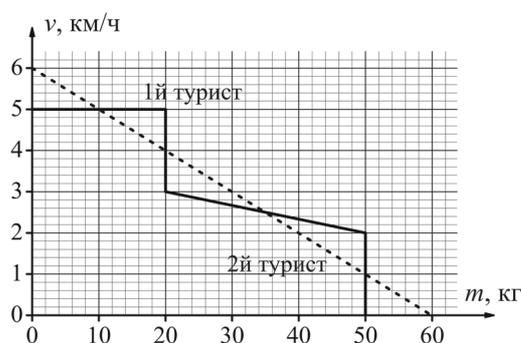
$$m_2 = \frac{m}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{m \rho_2 (\rho - \rho_1)}{\rho (\rho_2 - \rho_1)} = 865 \text{ г}$$

Тогда отношение стоимости короны к стоимости короны из чистого золота равно $\frac{1}{100} \frac{m_1}{m} + \frac{1}{5} \frac{m_2}{m} = 0,174$. Отсюда эквивалент стоимости короны равен 174 граммам золота.

Критерий	Баллы
Выражение для средней плотности короны	3 балла
Правильно посчитано отношение масс, или объёмов осмия и серебра	2 балла
Посчитаны массы, или объёмы серебра (≈ 135 г) и осмия (≈ 865 г)	2 балла
Получен правильный ответ (≈ 174 г золота)	3 балла

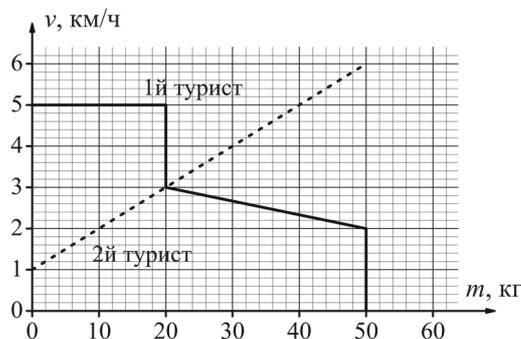
Задача 4. Туристы и груз

Двое туристов должны быстро доставить большую партию продуктов суммарной массой $M = 50$ кг в лагерь на расстоянии $L = 9$ км от стартовой точки. Зависимости скорости каждого из туристов от массы m переносимого им груза приведены на рисунке. За какое наименьшее время они смогут доставить груз?



Возможное решение. Вначале предположим, что туристы перенесут грузы за один заход и не будут возвращаться обратно за следующей партией груза. Заметим, что туристы должны прийти в лагерь одновременно. Если первый турист несет груз массой m , то второй должен нести груз массой $M - m$. Тогда для второго туриста перестроим график и отобразим на графике зависимость скорости 2го туриста от $M - m$. На графике найдем точку пересечения зависимостей, это точка $m = 20$ кг. То есть первый турист должен нести груз 20 кг, а второй $M - m = 30$ кг. Поскольку точка пересечения единственная, это единственное решение задачи. Соответствующая скорость движения туристов равна 3 км/ч, следовательно, они смогут доставить продукты за 3 часа.

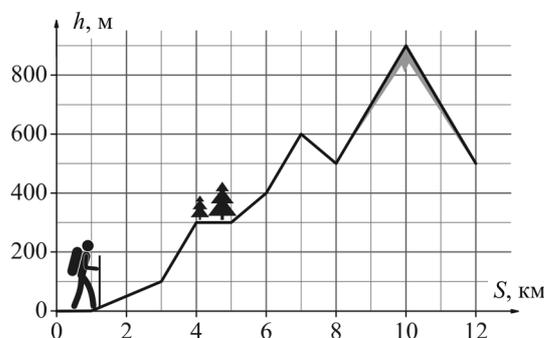
Теперь предположим, что туристы возвращались назад. Максимальная скорость туристов не больше 6 км/ч, следовательно, если туристы перенесли продукты за 2 захода, они потратили больше времени, чем за один заход при движении со скоростью 3 км/ч.



Критерий	Баллы
Идея того, что минимальное время получается когда оба туриста идут с одинаковой скоростью и приходят одновременно	2 балла
Идея построить для второго туриста график скорости от $M - t$, или альтернативный способ найти распределение груза между туристами для достижения максимальной скорости с доказательством максимальности скорости	3 балла
Получено, что оптимальная скорость 3 км/ч Оценивается только значение, можно без доказательства	2 балла
Получено правильное время, 3 часа	1 балла
Доказано, что если туристы будут доставлять продукты в несколько заходов, итоговое время будет больше	2 балла

Задача 5. Умный в гору не пойдёт

Когда турист движется по горизонтальной дороге или спускается вниз, каждый километр он проходит ровно за 12 минут. Если дорога поднимается вверх, то каждый метр подъема дороги на 1 км пути увеличивает время прохождения километра на 1 секунду. Например, если дорога поднимается вверх на 100 м за 1 км пути, то турист потратит на прохождение одного километра 13 минут 40 секунд. На графике показана зависимость высоты h от пройденного туристом расстояния S . Определите за какое время турист прошёл первые 10 км.



Возможное решение. Заметим, что время движения на наклонном участке равно сумме времени движения по горизонтальному участку той же длины (12 мин/км) и времени на подъем (1 секунда на 1 метр подъема). На участке с 1 по 7ю минуту турист поднялся на высоту 600 м, далее с 8й по 10ю минуту турист поднялся ещё на 400 м. Суммарный подъем равен 1000 м. Тогда полное время прохождения 10 км равно $12 \text{ минут} \cdot 10 + 1000 \cdot 1 \text{ с} = 8200 \text{ с} = 2 \text{ часа } 16 \text{ мин } 40 \text{ с}$.

Критерий	Баллы
Получен правильный ответ 2 часа 16 мин 40 с	4 балла
В решении верно посчитан суммарный подъем туриста 1000 м	2 балла
Обоснование	4 балла

7й класс 2-й вариант

Задача 1. Покраска забора

Тётя Полли отправила Тома Сойера красить деревянный забор длиной 30 ярдов и высотой 9 футов. Определите сколько литров краски потребуется Тому для покраски забора, если расход краски составляет 1 литр на 6 м^2 окрашиваемой площади.

Ярд и фут – единицы длины в английской системе мер. Известно, что 1 ярд = 3 фута = 0,9144 м. Забор нужно покрасить только с одной стороны.

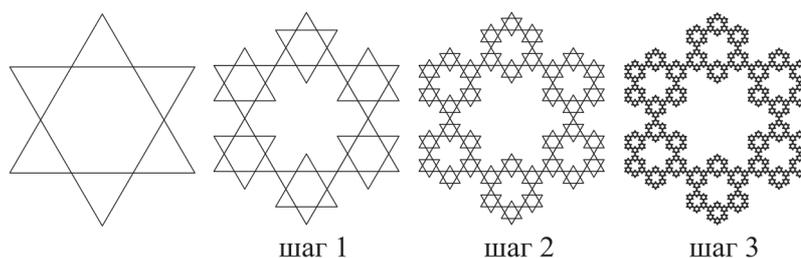
Возможное решение. Переведем размеры забора в систему СИ. Длина забора 30 ярдов = 90 футов = 27,4 м. Высота забора 9 футов = 2,74 м. Отсюда площадь забора равна $75,3 \text{ м}^2$.

Тогда для покраски забора потребуется $75,3/6 = 12,5$ л краски.

Критерий	Баллы
Правильный перевод единиц Площадь забора равна 810 квадратных футов = $75,25 \text{ м}^2 \approx 75 \text{ м}^2$ Альтернативно расход известки 1 кг на 43 квадратных фута	5 баллов
Получен правильный ответ 12,5 л краски.	5 баллов

Задача 2. Фрактальная снежинка

3D ручка позволяет создавать из быстро затвердевающего пластика линии одинаковой толщины. Перед Новым годом мальчик Нильс решил при помощи 3D ручки нарисовать украшение в форме снежинки. Вначале он нарисовал шестиконечную звезду из двух равносторонних треугольников. Масса получившейся фигурки оказалась равна 4 г. Затем на каждом следующем шаге Нильс каждый маленький треугольник дорисовывает до шестиконечной звезды, как показано на рисунке ниже. Какой будет масса снежинки после трёх шагов?



Возможное решение. Заметим, что на каждом шаге снежинка состоит из 6 снежинок на предыдущем шаге, размеры которых уменьшены в 3 раза. При уменьшении размера в 3 раза масса также уменьшается в 3 раза, толщина линий не меняется. Тогда на каждом шаге масса снежинки увеличивается в $6/3 = 2$ раза. Значит после 3х шагов масса ёлочки будет равна 32 г.

Критерий	Баллы
При уменьшении размера снежинки в 3 раза масса уменьшается в 3 раза (если остальное сделано правильно, то ставится автоматически)	2 балла
Масса снежинки на каждом шаге увеличивается в 2 раза (в этом пункте только оценивается идея, аккуратное доказательство не обязательно)	3 балла
Доказано, что масса снежинки на каждом шаге увеличивается в 2 раза	2 балла
Получен правильный ответ 32 г	3 балла

Задача 3. Корона Гиерона

Древнегреческий царь Гиерон повелел придворному ювелиру изготовить корону из золотого слитка массой $m = 2$ кг. Хитрый ювелир решил обмануть царя и вместо золотой короны сделал корону из сплава серебра и платины, а затем покрыл её тончайшим, практически невесомым, слоем золота. При этом соотношение серебра и платины в сплаве ювелир подобрал таким образом, чтобы средняя плотность короны была равна плотности золота. Известно, что 1 грамм платины стоит в 2 раза дешевле 1 грамма золота, а 1 грамм серебра в 100 раз дешевле 1 грамма золота. Определите эквивалент стоимости короны в граммах золота.

Считайте плотность золота равной $\rho = 19,3$ г/см³, плотность серебра $\rho_1 = 10,5$ г/см³, плотность платины $\rho_2 = 21,5$ г/см³. Считайте, что объем сплава серебра и платины равен сумме объемов серебра и платины в сплаве.

Возможное решение. Обозначим объем серебра V_1 , объем платины V_2 . Тогда средняя плотность короны может быть выражена как

$$\frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \rho$$

Из условия равенства средней плотности короны и плотности золота выражаем отношение объемов

$$\rho_2 V_2 - \rho V_2 = \rho V_1 - \rho_1 V_1, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho}$$

Тогда отношение масс платины и серебра равно $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = \frac{\rho_2 (\rho - \rho_1)}{\rho_1 (\rho_2 - \rho)}$

Суммарная масса равна массе короны, откуда получаем

$$m_1 = \frac{m}{\frac{m_2}{m_1} + 1} = \frac{m \rho_1 (\rho_2 - \rho)}{\rho (\rho_2 - \rho_1)} = 218 \text{ г}$$

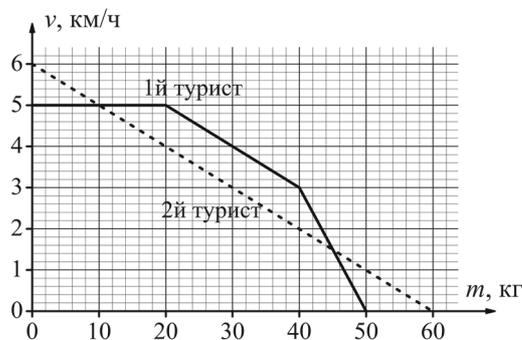
$$m_2 = \frac{m}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{m \rho_2 (\rho - \rho_1)}{\rho (\rho_2 - \rho_1)} = 1782 \text{ г}$$

Тогда отношение стоимости короны к стоимости короны из чистого золота равно $\frac{1}{100} \frac{m_1}{m} + \frac{1}{2} \frac{m_2}{m} = 0,447$. Отсюда эквивалент стоимости короны равен 893 граммам золота.

Критерий	Баллы
Выражение для средней плотности короны	3 балла
Правильно посчитано отношение масс, или объёмов платины и серебра	2 балла
Посчитаны массы или объёмы серебра (≈ 218 г) и платины (≈ 1782 г)	2 балла
Получен правильный ответ, стоимость короны равна 893 г золота.	3 балла

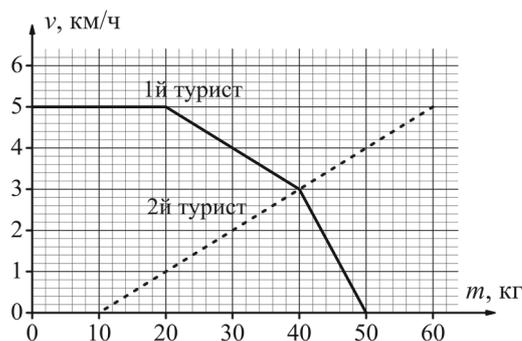
Задача 4. Туристы и груз

Двое туристов должны быстро доставить большую партию продуктов суммарной массой $M = 70$ кг в лагерь на расстоянии $L = 12$ км от стартовой точки. Зависимости скорости каждого из туристов от массы m переносимого им груза приведены на рисунке. За какое наименьшее время они смогут доставить груз?



Возможное решение. Вначале предположим, что туристы перенесут грузы за один заход и не будут возвращаться обратно за следующей партией груза. Если первый турист несет груз массой m , то второй должен нести груз массой $M - m$. Для второго туриста перестроим график и отобразим на графике зависимости скорости 2го туриста от $M - m$. На графике найдем точку пересечения зависимостей, это точка $m = 40$ кг. То есть первый турист должен нести груз 40 кг, а второй $M - m = 30$ кг. Поскольку точка пересечения единственная, это единственное решение задачи. Соответствующая скорость движения туристов равна 3 км/ч, следовательно, они смогут доставить продукты за 4 часа.

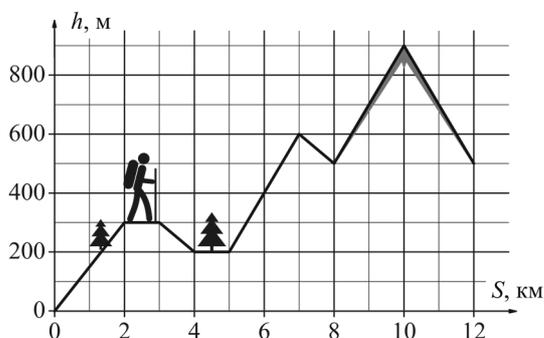
Теперь предположим, что туристы возвращались назад. Максимальная скорость туристов не больше 6 км/ч, следовательно, если туристы перенесли продукты за 2 захода, они потратили больше времени, чем за один заход при движении со скоростью 3 км/ч.



Критерий	Баллы
Идея того, что минимальное время получается когда оба туриста идут с одинаковой скоростью	2 балла
Идея построить для второго туриста график скорости от $M - t$, или альтернативный способ найти распределение груза между туристами для достижения максимальной скорости с доказательством максимальности скорости	3 балла
Получено, что оптимальная скорость 3 км/ч Оценивается только значение, можно без доказательства	2 балла
Получено правильное время, 4 часа	1 балла
Рассмотрен случай когда туристы доставляют продукты за несколько заходов и показано, что время в этом случае больше	2 балла

Задача 5. Умный в гору не пойдёт

Когда турист движется по горизонтальной дороге или спускается вниз, каждый километр он проходит ровно за 10 минут. Если дорога поднимается вверх, то каждый метр подъема дороги на 1 км пути увеличивает время прохождения километра на 2 секунды. Например, если дорога поднимается вверх на 100 м за 1 км пути, то турист потратит на прохождение одного километра 13 минут 20 секунд. На графике показана зависимость высоты h от пройденного туристом расстояния S . Определите за какое время турист прошел расстояние 12 км.



Возможное решение. Заметим, что время движения на наклонном участке равно сумме времени движения по горизонтальному участку той же длины (10 мин/км) и времени на подъем (2 секунды на 1 метр подъема). На участке с начала движения до конца 2й минуты турист поднялся на высоту 300 м, далее 5й по 7ю минуты турист поднялся на 400 м и с 8й по 10ю минуту турист поднялся ещё на 400 м. Суммарный подъем равен 1100 м. Тогда полное время прохождения 12 км равно $10 \text{ минут} \cdot 12 + 1100 \cdot 2 \text{ с} = 9400 \text{ с} = 2 \text{ часа } 36 \text{ мин } 40 \text{ с}$.

Критерий	Баллы
Получен правильный ответ 2 часа 36 мин 40 с	4 балла
В решении верно посчитан суммарный подъем туриста 100 м, или отдельно на каждом участке	2 балла
Обоснование	4 балла