

7 класс

Задача 7.1. Соревнования в джунглях.

В джунглях вместо «человеческих» единиц измерения длины животные пользуются тремя другими: «попугаями», «мартышками» и «удавами». Как-то раз Попугай, Мартышка и Удав решили устроить соревнование по бегу. Когда Мартышка, пробежав дистанцию за 3,6 минуты, оглянулась, оказалось, что Попугай отстал от неё на 4,2 «удава». Когда же, наконец, и Попугай прибежал к финишу, выяснилось, что Удаву осталось ползти ещё $5/14$ длины дистанции. Известно, что скорость Попугая на дистанции была 140 «попугаев» в минуту, скорость Мартышки — 25 «мартышек» в минуту, скорость Удава — 3 «удава» в минуту, а все животные стартовали одновременно.

1. Определите, сколько «попугаев» в 1 «мартышке» и в 1 «удава».
2. Найдите длину дистанции и выразите её в «попугаях».

Ответ: 1) 1 «мартышка» = 7 «попугаев», 1 «удава» = 30 «попугаев»; 2) 630 «попугаев».

Решение: Пусть L — длина дистанции, 1 «мартышка» = m «попугаев», а 1 «удава» = n «попугаев». Тогда скорость Мартышки равна $25m$ «попугаев»/мин, скорость Удава — $3n$ «попугаев»/мин. Так как Мартышка пробежала дистанцию за 3,6 мин,

$$L = 25m \text{ «попугаев»/мин} \times 3,6 \text{ мин} = 90m \text{ «попугаев»}.$$

В момент финиша обезьяны Попугаю осталось пробежать расстояние $4,2n$ «попугаев». Следовательно

$$L = 140 \text{ «попугаев»/мин} \times 3,6 \text{ мин} + 4,2n \text{ «попугаев»} \Rightarrow 504 + 4,2n = 90m.$$

Всю дистанцию Попугай пробегает за время $t = (90m/140)$ мин. За это же время удав должен проползти $L - 5L/14 = 9L/14$, то есть $9/14 \cdot 90m$ «попугаев». Отсюда следует, что

$$9/14 \cdot 90m \text{ «попугаев»} = 3n \text{ «попугаев»/мин} \times (90m/140) \text{ мин} \Rightarrow 9/14 = 3n/140 \Rightarrow n = 30.$$

Соответственно,

$$m = \frac{504 + 4,2n}{90} = 7,$$

а длина дистанции равна $L = 90m$ «попугаев» = 630 «попугаев».

Критерии:

- 1) Записано, что $L = v_{\text{мартышки}} \cdot 3,6$ мин или аналог 1 балл
- 2) Записано, что $L = v_{\text{попугая}} \cdot 3,6$ мин + 4,2 «удава» или аналог 1 балл
- 3) Записано верное выражение для времени t , за которое Попугай пробегает дистанцию 1 балл
- 4) Записано, что $9L/14 = v_{\text{удава}} t$ 1 балл
- 5) Правильно найдено, сколько «попугаев» в одном «удава» 2 балла
- 6) Правильно найдено, сколько «попугаев» в одной «мартышке» 2 балла
- 7) Найдено верное значение длины дистанции в «попугаях» 2 балла

Задача 7.2. Смешарики на прогулке.

В один прекрасный день Бараш вышел из дома и, напевая по дороге песенку, не спеша пошёл к домику Кроша. Одновременно с этим сам Крош тоже вышел из своего домика и пошёл навстречу. Однако, если Бараш шёл всегда с одной и той же скоростью 0,8 м/с, скорость Кроша всё время менялась (см. рис. 7.1). Дойдя до домика Бараша, Крош развернулся, тут же пошёл обратно и через час после начала прогулки вернулся к себе.

1. Каково расстояние между домиками Кроша и Бараша?
2. На каком расстоянии от домика Бараша Смешарики встретятся первый раз?
3. На каком расстоянии от домика Бараша они встретятся второй раз?

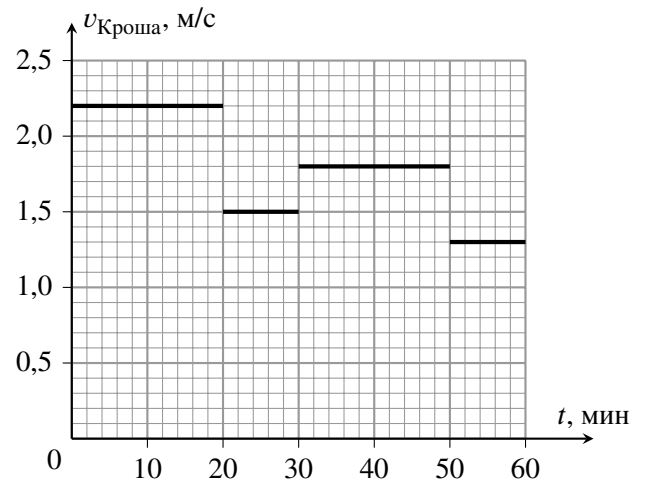


Рис. 7.1.

Ответ: 1) 3240 м; 2) 864 м; 3) 2352 м.

Решение: Определим общий путь, пройденный Крошем за час. По графику он составляет

$$s_{\text{Кроша}} = 2,2 \text{ м/с} \cdot 1200 \text{ с} + 1,5 \text{ м/с} \cdot 600 \text{ с} + 1,8 \text{ м/с} \cdot 1200 \text{ с} + 1,3 \text{ м/с} \cdot 600 \text{ с} = 6480 \text{ м}.$$

Так как за этот час Крош успел сходить туда-обратно, полученное значение равно двум расстояниям между домиками Смешариков. Таким образом, от домика Кроша до домика Бараша 3240 м.

Первая встреча состоится, когда Смешарики идут навстречу друг другу. Найдём время их встречи, для чего заметим, что за первые 20 мин Крош и Бараш сблизились бы на $(2,2 \text{ м/с} + 0,8 \text{ м/с}) \cdot 1200 \text{ с} = 3600 \text{ м}$, но это больше, чем 3240 м. Значит друзья встретятся раньше, чем за 20 мин. Время их первой встречи равно

$$t_1 = \frac{3240 \text{ м}}{2,2 \text{ м/с} + 0,8 \text{ м/с}} = 1080 \text{ с}.$$

Отсюда получим, что место первой встречи находится на расстоянии $0,8 \text{ м/с} \cdot 1080 \text{ с} = 864 \text{ м}$ от домика Бараша.

Вторая встреча произойдёт, когда Крош нагонит Бараша на обратном пути. В этом случае Крош должен пройти на 3240 м больше. За первые 30 мин разница в пройденном пути составит

$$(2,2 \text{ м/с} - 0,8 \text{ м/с}) \cdot 1200 \text{ с} + (1,5 \text{ м/с} - 0,8 \text{ м/с}) \cdot 600 \text{ с} = 2100 \text{ м},$$

что меньше 3240 м. Оставшиеся 1140 м Крош сокращает эту разницу со скоростью $1,8 \text{ м/с} - 0,8 \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}$. Следовательно, он догонит Бараша через

$$30 \text{ мин} + \frac{1140 \text{ м}}{1 \text{ м/с}} = 2940 \text{ с}.$$

За это время Бараш отойдёт от своего домика на $2940 \text{ с} \cdot 0,8 \text{ м/с} = 2352 \text{ м}$.

Критерии:

- | | |
|--|---------|
| 1) Найден общий путь, пройденный Крошем (6480 м) | 2 балла |
| 2) Найдено расстояние между домиками (3240 м) | 1 балл |
| 3) Правильно найдено время первой встречи | 2 балла |
| 4) Правильно найден ответ на второй вопрос | 1 балл |
| 5) Правильно найдено время второй встречи | 3 балла |
| 6) Правильно найден ответ на третий вопрос | 1 балл |

Указание проверяющим:

В случае, если при ответе на второй и/или третий вопросы учащимся допущена небольшая арифметическая ошибка (не сильно изменившая ответ), в пп. 4 и/или 6 ставить 0,5 балла.

Задача 7.3. На дачу и обратно.

Мальчик Никита поехал с родителями на дачу. Дорога туда была свободной, и средняя скорость движения автомобиля составила 75 км/ч. На следующий день, по дороге обратно, автомобиль попал в пробку и ехал со скоростью 15 км/ч втрое дольше по времени, чем заняла накануне вся дорога от дома до дачи. Оставшийся отрезок пути до дома был посвободнее, и автомобиль смог разогнаться до скорости 40 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля на **обратном** пути от дачи до дома.

Ответ: 20 км/ч.

Решение: Пусть t — время, потраченное на путь до дачи. Тогда расстояние между домом и дачей $s = 75 \text{ км/ч} \cdot t$. Время, потраченное в пробке на обратном пути, равно $3t$, а оставшееся время до дома обозначим t_1 . Так как пути туда и обратно совпадают,

$$75 \text{ км/ч} \cdot t = 15 \text{ км/ч} \cdot 3t + 40 \text{ км/ч} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{4}t.$$

Отсюда найдём среднюю скорость на обратном пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{3t + t_1} = \frac{75 \text{ км/ч} \cdot t}{3t + 3t/4} = \frac{300}{15} \text{ км/ч} = 20 \text{ км/ч}.$$

Критерии:

- 1) Записано, что $s = 75 \text{ км/ч} \cdot t$ 2 балла
- 2) Записано уравнение $75 \text{ км/ч} \cdot t = 15 \text{ км/ч} \cdot 3t + 40 \text{ км/ч} \cdot t_1$ или аналог 3 балла
- 3) Найдено выражение для t_1 (или его аналог) 2 балла
- 4) Найдена средняя скорость 3 балла

Указания проверяющим:

- 1) Если в решении берётся конкретное значение t , s и т.п. (например, $t = 1 \text{ ч}$), такое решение оценивается максимум в 1 балл.
- 2) Выражение из п. 1 критериев может быть написано сразу внутри уравнения из п. 2. В этом случае баллы за п. 1 ставятся.

Задача 7.4. И так, и так одна пятая.

На дно мерного сосуда положили два кубика, большой и маленький, после чего в этот сосуд стали медленно, с постоянной скоростью наливать воду. Ровно через минуту воду отключили, и оказалось, что маленький кубик полностью находится в воде, а большой высывается из неё на одну пятую своего объёма (рис. 7.2а). Когда же большой кубик поставили на маленький сверху (рис. 7.2б), большой оказался погружён в воду на всё ту же одну пятую часть своего объёма.

1. Пользуясь рисунками, определите отношение длин рёбер большого и маленького кубика.
2. Найдите объём каждого кубика в см^3 .
3. Определите, с какой скоростью (в мл/с) наливали в мерный сосуд воду.

Стенки мерного сосуда вертикальны, а в процессе переноса кубиков вода из сосуда не выливается.

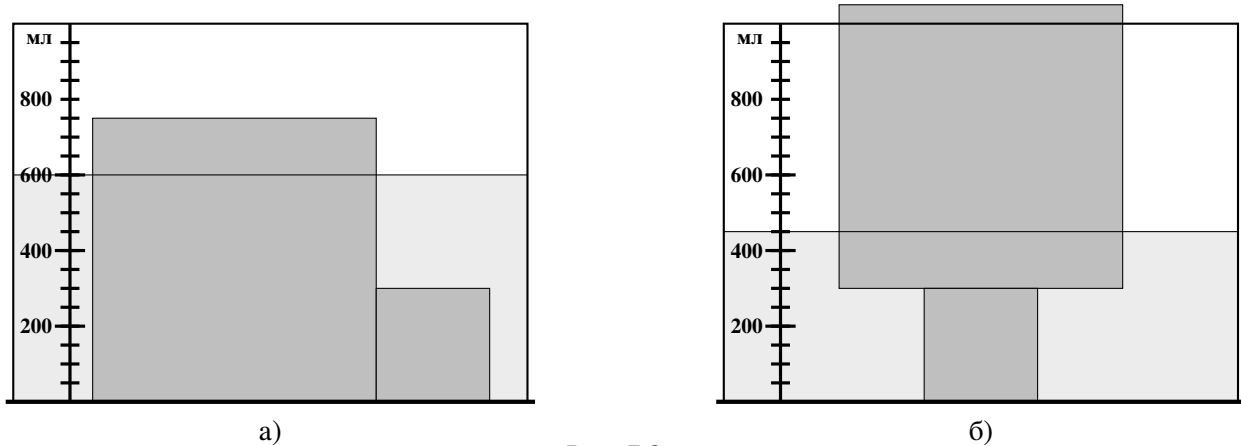


Рис. 7.2.

Ответ: 1) 2,5; 2) 16 см^3 , 250 см^3 ; 3) $6,4 \text{ мл/с}$.

Решение: Определим высоты кубиков по шкале мерного сосуда (в неких условных единицах). Большой кубик имеет высоту, равную 750 условных единиц, так как его верхний край доходит до отметки 750 мл. Высота маленького кубика равна 300 условных единиц. Следовательно, отношение высот кубиков равно $750/300 = 2,5$.

Пусть V_0 — объём воды в сосуде, налитый за 1 мин, а V_M — объём маленького кубика. Тогда объём большого будет равен $V_6 = (2,5)^3 V_M = 15,625 V_M$. Разница в объёме, погружённом в воду, между первым и вторым рисунком составляет $3V_6/5$. С другой стороны, эта разница равна $600 \text{ см}^3 - 450 \text{ см}^3 = 150 \text{ см}^3$. Приравнявая, получим, что объём большого куба равен $V_6 = 250 \text{ см}^3$. Соответственно, объём маленького куба равен $V_M = 250/15,625 \text{ см}^3 = 16 \text{ см}^3$.

На первом рисунке большой кубик погружён на $4/5$ своего объёма, поэтому

$$600 \text{ см}^3 = \frac{4}{5} \cdot V_6 + V_M + V_0 \Rightarrow 600 \text{ см}^3 = 200 \text{ см}^3 + 16 \text{ см}^3 + V_0 \Rightarrow V_0 = 384 \text{ см}^3.$$

Так как объём V_0 наливается в сосуд за 60 с, скорость, с которой наливалась вода, равна

$$u = \frac{384 \text{ мл}}{60 \text{ с}} = 6,4 \text{ мл/с}.$$

Критерии:

- | | |
|---|---------|
| 1) Указан (явно или неявно) способ определения отношения рёбер | 1 балл |
| 2) Найдено верное отношение длин рёбер | 1 балл |
| 3) Найдено верное отношение объёмов кубиков | 1 балл |
| 4) Предложен корректный способ определения объёма кубика (любого из двух) | 2 балла |
| 5) Правильно найден объём большого кубика | 1 балл |
| 6) Правильно найден объём маленького кубика | 1 балл |
| 7) Правильно найден объём воды в сосуде | 2 балла |
| 8) Найдено верное значение u | 1 балл |

Указание проверяющим:

Если поставлены баллы за пункты 5 и/или 6, балл за п. 4 ставится автоматически.