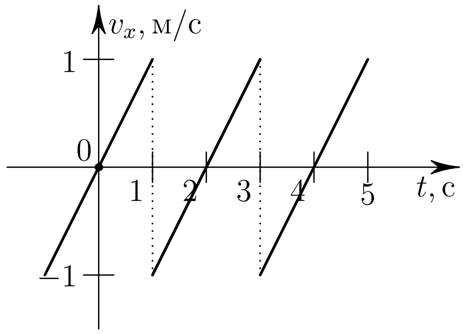
Р е ш е н и я
заданий II муниципального (районного) этапа
Всероссийской олимпиады школьников по физике 2023–2024
9 класс

1. Дан график зависимости v_x от времени. Найти перемещение тела, пройденный им путь с начального момента времени и построить график a_x. Принять, что начальная координата равна 10 см.



Решение: Заметим, что для определения как перемещения, так и пройденного пути нет необходимости знать начальное положение, поэтому указанное в задании начальная координата — это избыточные данные в данной задаче.

Поскольку дан график $v_x(t)$ то перед нами одномерное движение вдоль оси Ox.

Перемещение при равномерном движении вычисляется по формуле

$$\Delta x = v_x \Delta t$$

что представляет собой площадь под графиком $v_x(t)$. Это остаётся справедливым и при произвольном движении.

В нашей случае скорость увеличивается линейно, кроме этого есть промежутки времени когда проекция скорости отрицательна, а значит тело движется против оси Ox. На интервалах $(1;3)$ и $(3;5)$ скорость изменяется от отрицательных к положительным значениям, так что суммарная площадь (считая, что площадь под осью Ox отрицательная) равна нулю.

В итоге, перемещение определяется движением в интервале $(0;1)$ и оно равно

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5\,\text{м}.$$

Что касается пройденного пути — это сумма модулей перемещений, в нашем случае — модулей площадей, а значит

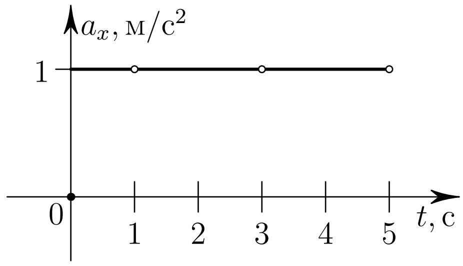
$$s = 5 \cdot \Delta x = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5\,\text{м}.$$

Ускорение — это скорость изменения скорости. Очевидно, что в точках 1, 3 и 5 ускорение не определено. На каждом интервале ускорение постоянно и равно

$$a_x = \frac{1-0}{1-0} = 1\,\text{м/с}^2.$$

Здесь мы посчитали ускорение на интервале $(0;1)$.

График ускорения



Ответ: График ускорения приведён выше, перемещение с начального момента времени равно 0,5 м, пройденный путь — 2,5 м.

Критерии оценивания:

- указано, что знание начальной координаты не нужно в данной задаче (1 балл);
- указано, что перемещение — это площадь под графиком (1 балл);
- указано, что основной вклад в перемещение даёт интервал (0; 1) (1 балл);
- указано, что движение в задаче — равноускоренное (за исключение трёх точек) (1 балл);
- указано, что в моменты времени 1, 3 и 5 ускорение не определено (2 балла);
- вычислено ускорение (1 балл);
- приведён график ускорения с «выколотыми» точками (2 балла);
- ответ приведён в единицах СИ (1 балл).

2. В сосуде смешивают 300 г воды и 400 г льда. Найти установившуюся температуру смеси, если температура воды была 10 °C, а льда — −20 °C.

Теплоёмкостью сосуда пренебречь. Удельная теплоёмкость воды 4,19 Дж/(г · С), льда 2,12 Дж/(г · С), удельная теплота плавления льда — 330 Дж/г.

Решение: По-хорошему мы должны перевести физические постоянные в единицы СИ, но в данном примере если мы будет оперировать граммами и градусами Цельсия мы получим в итоге единицы СИ.

Исходя из указанных данных нельзя сразу сказать, что именно получиться в результате. Рассмотрим сколько энергии $Q_в$ может дать вода, остывая до 0 °C, сколько $Q_л$ потребуется льду, чтобы нагреться до 0 °C:

$$Q_в = c_в m_в \Delta t_1 = 4{,}19 \cdot 300 \cdot 10 = 1{,}257 \cdot 10^4\ \text{Дж}, \quad \Delta t_1 = 10\,^\circ\text{C} - 0\,^\circ\text{C},$$
$$Q_л = c_л m_л \Delta t_2 = 2{,}12 \cdot 400 \cdot 20 = 1{,}696 \cdot 10^4\ \text{Дж}, \quad \Delta t_2 = 0\,^\circ\text{C} - (-20)\,^\circ\text{C}.$$

Отсюда видно, что вода отдав всё своё тепло не сможет полностью нагреть лёд. Наоборот, часть воды замёрзнет, чтобы лёд нагрелся до 0 °C. Хотя в задаче не требуется найти эту массу её несложно посчитать:

$$\Delta m = \frac{Q_л - Q_в}{\lambda} \approx 13{,}3\ \text{г}, \quad \lambda = 330\ \text{Дж/г}.$$

Итак, в результате получится смесь воды и льда при температуре 0 °C, эта смесь будет находится в динамическом равновесии: любое тепло, забираемое у воды (она при этом переходит в твёрдое состояние) идёт на таяние льда, дающее тоже самое количество воды.

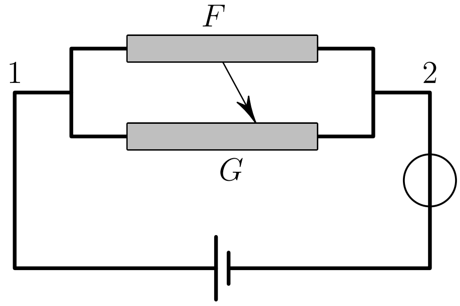
Ответ: Смесь из воды, массой $m_в \approx 86{,}7$ г и льда, массой $m_л \approx 413{,}3$ г при температуре 0 °C.

Критерии оценивания:

- указано, что в данной задаче нет необходимости переводить параметры в единицы СИ, т.к. при перемножении исходных единиц мы получим ответ в единицах СИ (2 балла);
- указано, что сразу сказать какое будет состояние, без анализа теплового баланса, невозможно (1 балл);
- вычислено сколько тепла может отдать вода при своём остывании до 0 °C (1 балл);
- вычислено сколько тепла может забрать лёд при своём нагревании до 0 °C (1 балл);
- из сравнения полученных значений сделан вывод, что невозможно растопить весь лёд и невозможно заморозить всю воду (2 балла);

- дано пояснение, что в задаче получает динамическое равновесие жидкой и твёрдой фаз воды (2 балла);
- указано, что температура смеси будет равна 0 °C (1 балл).

3. Два одинаковых проволочных резистора включены по схеме, указанной на рисунке. Средняя точка резистора F соединена с подвижным контактом резистора G. Ток, протекающий через амперметр, при неизменном напряжении между точками 1 и 2 зависит от положения, подвижного контакта. Во сколько раз максимальный ток амперметра превосходит минимальный? (Сопротивлением амперметра и соединительных проводов пренебречь).



Решение:

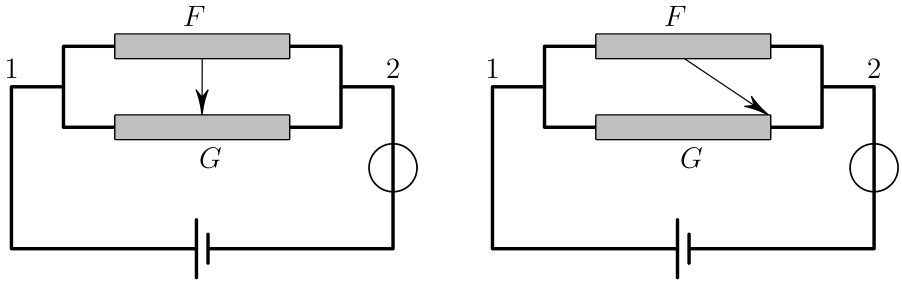
Силу тока в цепи найдём из закона Ома

$$I = \frac{U}{R}$$

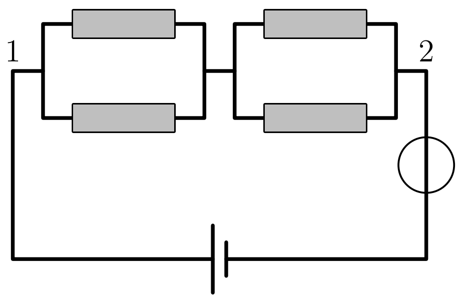
поэтому разница между максимальным и минимальным токами будет определяться минимальным и максимальным сопротивлением

$$I_{\max} = \frac{U}{R_{\min}}, \qquad I_{\min} = \frac{U}{R_{\max}}, \qquad \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{R_{\max}}{R_{\min}}.$$

Из соображений симметрии нам нужно рассмотреть два варианта положения контакта:



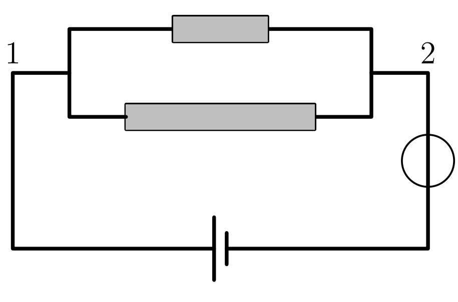
Для первого случая эквивалентная схема будет



Поскольку резисторы одинаковые, то обозначая их сопротивление через R, получим, что сопротивление каждого элемента равно $R/2$. В итоге, полное сопротивление

$$R_a = R_I + R_{II}, \quad \frac{1}{R_I} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{R/2} = \frac{4}{R}, \quad R_{II} = R_I = \frac{R}{4}, \quad R_a = \frac{R}{2}.$$

Для второго варианта эквивалентная схема



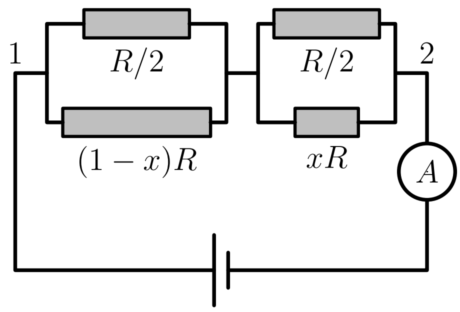
Здесь полное сопротивление равно

$$R_b = R_I, \quad \frac{1}{R_I} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}, \quad R_b = \frac{R}{3}.$$

Поскольку $R_a > R_b$, то

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{3}{2}.$$

Другой способ решения.Пусть контакт находится на расстоянии xl $(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2})$ от правого края резистора, тогда эквивалентная схема имеет вид



Полное сопротивление цепи

$$R_t = R_I + R_{II}, \quad \frac{1}{R_I} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{(1-x)R}, \quad \frac{1}{R_{II}} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{xR},$$
$$R_t = R\Big(\frac{x}{2x+1} + \frac{1-x}{3-2x}\Big) = R\frac{1+4x-4x^2}{(2x+1)(3-2x)}.$$

Для силы тока в цепи имеем

$$I = \frac{U}{R_t}, \quad I_{\max} = \frac{U}{R_{\min}}, \quad I_{\min} = \frac{U}{R_{\max}}.$$

Будем рассматривать величину $1/R_t$ и переменную $y = 2x$, $(0 \leqslant y \leqslant 1)$:

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R}\frac{(y+1)(3-y)}{1+2y-y^2} = \frac{1}{R}\Big(1 + \frac{2}{1+2y-y^2}\Big).$$

Знаменатель дроби — квадратичная парабола

$$1 + 2y - y^2 = 2 - (y-1)^2 = \big(\sqrt{2}+1-y\big)\big(\sqrt{2}-1+y\big)$$

с вершиной в точке $(1; 2)$ и нулями в точках $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$. На отрезке $[0; 1]$ она положительна и возрастает от 1 до 2, поэтому

$$2 \leqslant 1 + \frac{2}{1+2y-y^2} \leqslant 3.$$

Отсюда

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: Максимальный ток отличается от минимального в полтора раза.

Критерии оценивания:

- указано, что нужно рассмотреть только два варианта расположения контакта (2 балла);

- указаны эквивалентные схемы для обоих вариантов (3 балла);
- рассчитан ток для первой схемы (2 балла);
- рассчитан ток для второй схемы (2 балла);
- найдено их отношение (1 балл).

Для **второго способа решения**:

- приведена эквивалентная схема с указанными сопротивлениями (2 балла);
- приведён расчёт сопротивления левой (1 балл) и правой части (1 балл);
- приведена формула полного сопротивления с общем виде (2 балла);
- проведён анализ изменения полного сопротивления цепи (3 балла);
- приведено отношение максимального и минимального тока (1 балл).

4. В стакане с водой плавает деревянная шайба с цилиндрическим сквозным отверстием. Ось шайбы и отверстия параллельны. Площадь дна стакана S, площадь сечения отверстия S_i. Отверстие осторожно заполняют доверху маслом. На какую высоту поднимется шайба если в начале её выступающая из воды часть имела высоту h.

Решение: Прежде всего выясним, о каком изменении высоты идёт речь в задаче.

Представим, что мы наливаем в отверстие шайбы воду. Нетрудно понять, что в таком случае мы бы просто наполняли стакан через отверстие, а значит относительное возвышение шайбы над водой останется прежним. Отсюда также следует, что мы не смогли бы заполнить отверстие водой.

Что изменится, если мы будем заполнять отверстие маслом? Поскольку масло плотнее воздуха, то оно будет выдавливать воду из отверстия обратно в сосуд. Изменится ли при этом возвышение шайбы на уровнем воды? Ответ: нет. Если обратиться к силе Архимеда

$$F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{ж}} h V_{\text{выт}},$$

то окажется, что объём вытесненной шайбой воды не изменился. В самом деле, представим, что шайба собрана из двух частей. Если её мысленно разделить, то ничего не изменится. Отверстие в шайбе служит ограничителем для наливаемого масла.

В итоге мы можем заключить, что относительное возвышение шайбы на водой не изменится, что изменится — это абсолютная высота шайбы, например, над дном стакана. Таким образом, мы будем искать насколько поднялась шайба относительно дна стакана.

В условии задачи ничего не сказано относительно плотности воды, шайбы и масла. Из того, что шайба плавает в воде мы можем заключить, что $\rho_{\text{ш}} < \rho_{\text{в}}$. Что касается масла, то оно может быть разным, так что возможны варианты

$$\rho_{\text{ш}} < \rho_{\text{м}}, \quad \rho_{\text{ш}} > \rho_{\text{м}}.$$

Заметим, что вариант $\rho_{\text{м}} > \rho_{\text{ш}}$, а также случай $\rho_{\text{м}} > \rho_{\text{в}}$ противоречит условию задачи. Действительно, если $\rho_{\text{м}} > \rho_{\text{в}}$, то масло начнёт вытеснять воду из отверстия и поскольку оно не растворяется в воде (масло гидрофобно), то из-за условия $\rho_{\text{м}} > \rho_{\text{в}}$ получим, что масло выдавит воду из отверстия и начнёт вытекать в сосуд, ещё не успев дойти до края шайбы (это справедливо и в случае $\rho_{\text{м}} = \rho_{\text{в}}$). Другими словами, как и в случае с водой выше, мы будем наливать масло в отверстие, но оно не будет заполнено, т.к. масло будет вытекать в сосуд. Тоже самое касается и случая $\rho_{\text{ш}} < \rho_{\text{м}} < \rho_{\text{в}}$.

Остаётся только вариант

$$\rho_м < \rho_ш < \rho_в.$$

Столб масла высотой $h + \Delta h$ уравновешен силой Архимеда

$$m_м g = \rho_в g V_{выт}, \quad V_{выт} = S_i \Delta h,$$
$$\rho_м S_i (h + \Delta h) = \rho_в S_i \Delta h,$$
$$\Delta h = \frac{h}{\frac{\rho_в}{\rho_м} - 1}.$$

Общий уровень воды в стакане поднимется на

$$\Delta H = \frac{V_{выт}}{S} = \frac{h}{\frac{\rho_в}{\rho_м} - 1} \frac{S_i}{S}.$$

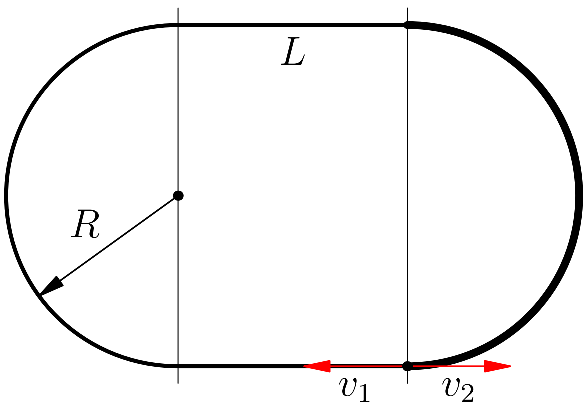
Ответ: Шайба поднимется на высоту

$$\Delta H = \frac{h}{\frac{\rho_в}{\rho_м} - 1} \frac{S_i}{S}.$$

Критерии оценивания:

- проведён анализ и показано, что относительное возвышение шайбы останется прежним (3 балла);
  анализ может быть и аналитическим, например, сравнивая возвышение шайбы с отверстие и без отверстия;
- указано, что плотности веществ могут быть различными (1 балл);
- разобран случай, когда плотность масла больше плотности шайбы (2 балла);
- разобран случай, когда плотность масла больше или равна плотности воды (2 балла);
- вычислено насколько поднимется шайба (2 балла).

5. При постройке беговой дорожки часть покрытия на круговом отрезке была сделана из другого материала, чем всё остальное. В результате, скорость движения на этом участке стала на треть меньше, чем на остальной части. Из одной точки в разные стороны начали бег участники. Определите когда и где они встретятся.



Решение: Обозначим скорость движения на большом участке как v_1, на малом — v_2. Бегуны встретятся через время τ после начала движения. Чтобы найти это время заметим, что если первый бегун продолжит движение, то через время τ он вернётся в начальную точку, поэтому (см. рис.)

$$2\tau = \frac{2L}{v_1} + \frac{\pi R}{v_1} + \frac{\pi R}{v_2},$$

откуда

$$\tau = \frac{L}{v_1} + \frac{\pi R}{2v_1} + \frac{\pi R}{2v_2}.$$

После этого можно найти точку встречи, так, первый бегут прошёл расстояние

$$S = v_1\tau = v_1\left(\frac{L}{v_1} + \frac{\pi R}{2v_1} + \frac{\pi R}{2v_2}\right) = l + \pi R + \frac{\pi}{R}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right).$$

Отсюда можно сказать, что они встретятся на расстоянии

$$s = \frac{\pi R}{2}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)$$

от левой круговой части.

Принимая во внимание условие задачи, $v_2 = 2/3v_1$, получим

$$\tau = \frac{L}{v_1} + \frac{5\pi R}{4v_1}, \quad s = \frac{\pi R}{4}.$$

Из рисунка можно заключить, что $R < L < 2R$, поэтому

$$s < L$$

точнее, что

$$\frac{\pi}{8} < \frac{s}{L} < \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: Бегуны встретятся через промежуток времени

$$\tau = \frac{L}{v_1} + \frac{5\pi R}{4v_1}$$

на расстоянии

$$s = \frac{\pi R}{4}$$

от левой круговой части дорожки (см. рис.).

Критерии оценивания:

- при анализе задачи отмечено, что второго бегуна можно заменить первым (2 балла);
- найдена формула для времени встречи (общий случай) (2 балла);
- найдено время встречи с данными задачи (1 балл);
- определена точка встречи (общий случай) (2 балла);
- найдена точка встречи согласно условия задачи (1 балл);
- проведён анализ, что в формуле для вычисления S корректно использовать только v_1, т.е. что $s < L$ (2 балла).