

9 класс

9.1. Неизвестное сопротивление. Электрическая схема состоит из резисторов с сопротивлениями $3R$ и $6R$, соединенных последовательно. Параллельно к каждому из резисторов подключили резистор с неизвестным сопротивлением R_x . Эквивалентное сопротивление получившейся цепи получилось равным $5R$. Определите R_x .

Решение (Рубцов Д.Н., Куликов И.В.):

Первый вариант решения (Рубцов Д.Н.). По правилам последовательного и параллельного соединения

$$5R = \frac{3RR_x}{3R + R_x} + \frac{6RR_x}{6R + R_x}$$

Это уравнение сводится к квадратному:

$$4R_x^2 - 9RR_x - 90R^2 = 0$$

Ответ: $R_x = 6R$. Второй корень квадратного уравнения $R_x < 0$ смысла не имеет.

Второй вариант решения (Куликов И.В.). Заменяем резистор $3R$ на два параллельно соединенных резистора $6R$. Обозначим за R_y связку параллельно соединенных резисторов $6R$ и R_x . Тогда, по правилам последовательного и параллельного соединения

$$\frac{6RR_y}{6R + R_y} + R_y = 5R$$

Это эквивалентно квадратному уравнению $R_y^2 + 7RR_y - 30R^2 = 0$ или $(R_y + 10R)(R_y - 3R) = 0$. Отрицательный корень физического смысла не имеет, следовательно, $R_y = 3R$.

Осталось сказать, что $\frac{1}{R_y} = \frac{1}{6R} + \frac{1}{R_x}$. Ответ $R_x = 6R$.

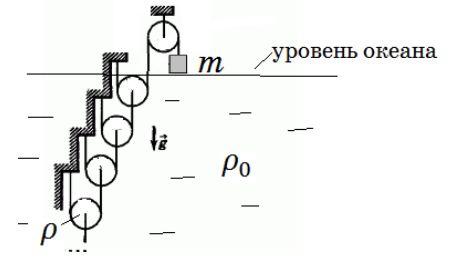
Критерии оценивания (10 баллов)

1	Продемонстрированы знания правил последовательного и параллельного соединения	2 балла
2	Получено выражение (или аналогичное) $5R = \frac{3RR_x}{3R + R_x} + \frac{6RR_x}{6R + R_x}$	3 балла
3	Получено итоговое квадратное уравнение $4R_x^2 - 9RR_x - 90R^2 = 0$	2 балла
4	Получен ответ $R_x = 6R$	2 балла
5	Обоснованно отброшен второй корень	1 балл

При угадывании ответа баллы ставятся только за пункты 1 и 4. Если произведена проверка угаданного ответа – то и за пункт 2.

9.2. Много блоков. Из легких нитей и одинаковых цилиндрических блоков плотностью ρ , радиусом R и шириной h собрана бесконечная система.

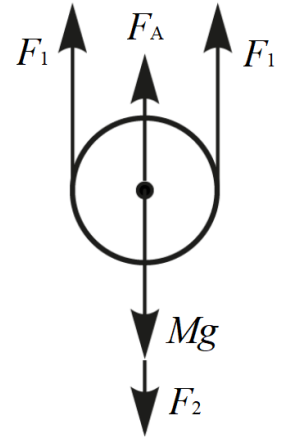
Найдите массу груза m , находящегося в воздухе, при которой система будет в равновесии. Все блоки, кроме неподвижного верхнего блока, погружены в океан. Плотность воды океана ρ_0 считайте известной и не изменяющейся с глубиной. Изменением ускорения свободного падения g с глубиной пренебречь, трения нет, течения нет.



Решение (фольклор):

Обозначим силу натяжения верхней нити за F . Условие равновесия для груза m : $mg = F$.

Объем одного блока $V = \pi R^2 h$. Масса блока $M = \rho V = \rho \pi R^2 h$. На блок, находящийся в воде, действуют пять сил: две силы натяжения вверх F_1 , одна – вниз F_2 , сила тяжести Mg и сила Архимеда $F_A = \rho_0 g V$.



Условие равновесия: $2F_1 + F_A = F_2 + Mg$.

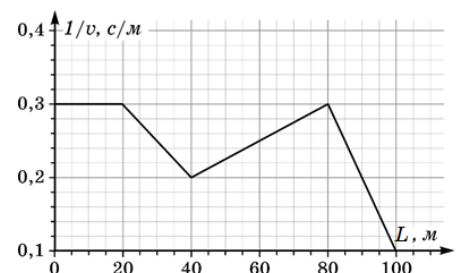
Рассмотрим блоки, находящиеся в воде. Мысленно уберем верхний блок, находящийся в воде. Оставшаяся система также бесконечна (" $\infty - 1 = \infty$ ") и ничем не отличается от исходной. Следовательно, силы натяжения всех нитей одинаковы! $F_1 = F_2 = F$.

Ответ $m = (\rho - \rho_0)\pi R^2 h$

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Условие равновесия для груза m : $mg = F$	1 балл
2	Объем одного блока $V = \pi R^2 h$	1 балл
3	Масса блока $M = \rho V$	0,5 балла
4	Правильная расстановка сил на блок, находящийся в воде	2 балла
5	Формула $F_A = \rho_0 g V$	0,5 балла
6	Условие равновесия: $2F_1 + F_A = F_2 + Mg$	2 балла
7	Силы натяжения всех нитей одинаковы!	2 балла
8	$m = (\rho - \rho_0)\pi R^2 h$	1 балл

9.3. Площадь? На рисунке представлен график зависимости величины, обратной скорости тела $1/v$, от пройденного телом пути L . Найдите среднюю скорость тела за весь путь (100 м).



Решение (фольклор):

Формула средней скорости $v_{\text{ср}} = \frac{L_{\text{весь}}}{t_{\text{всё}}}$. По условию $L_{\text{весь}} = 100$ м. Осталось определить время.

По определению, маленький промежуток времени – это отношение маленького пройденного пути и скорости на этом маленьком промежутке (будем считать промежуток настолько маленьким, что скорость на нем почти неизменна):

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{v} = \Delta L \cdot \frac{1}{v}$$

Геометрически, величина $\Delta t = \Delta L \cdot \frac{1}{v}$ является площадью столбика (прямоугольника) со сторонами ΔL и $\frac{1}{v}$ на нашем графике. Значит, все время – это площадь под графиком!

При подсчете искомой площади необходимо обратить внимание, что график начинается не с «нуля». Полученная площадь $t_{\text{всё}} = 25$ с.

Ответ $v_{\text{ср}} = \frac{100 \text{ м}}{25 \text{ с}} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Фактически, проведенная нами процедура является взятием определенного интеграла.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Формула средней скорости $v_{\text{ср}} = \frac{L_{\text{весь}}}{t_{\text{всё}}}$	1 балл
2	Доказано, что время – это площадь под графиком!	4 балла
3	$t_{\text{всё}} = 25$ с	4 балла
4	$v_{\text{ср}} = \frac{100 \text{ м}}{25 \text{ с}} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	1 балл

Некоторые дети могли не догадаться до идеи «площади под графиком», но могли оценочно взять среднюю скорость тела от 3,3 м/с до 10 м/с (за этот диапазон выйти невозможно, так как тело не двигалось со скоростями вне этого диапазона). В этом случае им можно ставить баллы только за пункт 1. Однако если они указали погрешность своего ответа (обоснованно посчитанную), например, $(6,7 \pm 3,4) \frac{\text{м}}{\text{с}}$, то можно ставить баллы и за пункт 4.

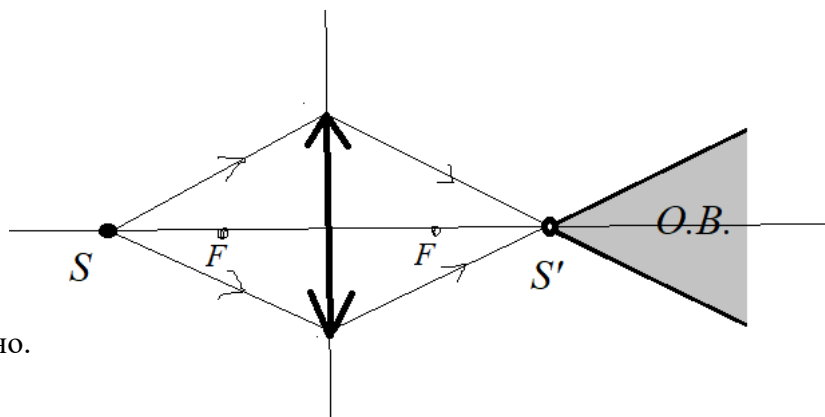
9.4. В двойном фокусе. На рисунке изображен точечный источник света, находящийся в двойном фокусе тонкой собирающей линзы, и сечение области видимости (О.В.) его изображения плоскостью рисунка. Перенесите (схематично) рисунок в бланк решений и восстановите положение линзы (ее сечение плоскостью рисунка) и ее фокусов.



Решение (Рубцов Д.Н.):

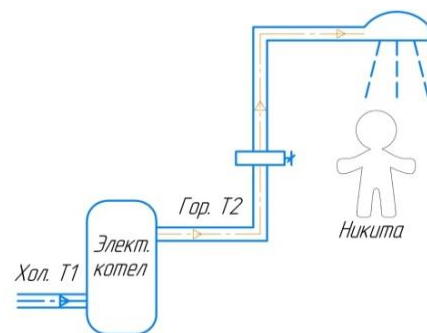
Точечный источник света, находящийся в двойном фокусе тонкой собирающей линзы, дает действительное изображение, находящееся в другом двойном фокусе. Это следует из формулы тонкой линзы или из подобия треугольников при рассмотрении хода луча в тонкой линзе.

Область видимости действительного изображения исходит от самого этого изображения S' . Следовательно, отрезок, соединяющий источник S и изображение S' , лежит на главной оптической оси линзы. Середина этого отрезка – оптический центр линзы, а срединный перпендикуляр лежит в плоскости линзы. Продолжение крайних лучей области видимости до плоскости линзы дает нам ограничение на размер линзы. Фокусы восстанавливаются тривиально.

**Критерии оценивания (10 баллов)**

1	Изображение находится в двойном фокусе	1 балл
2	Вершина конуса области видимости – само изображение	1 балл
3	Восстановлена Г.О.О.	1 балл
4	Восстановлен оптический центр линзы	1 балл
5	Восстановлена плоскость линзы	2 балла
6	Ограничен размер линзы	3 балла
7	Восстановлены оба фокуса	1 балл

9.5. **Тепленькая пошла!** Экспериментатор Никита решил пойти в душ и заинтересовался мощностью N электрического котла, который стоит у него в подвале. Для этого он исследовал зависимость температуры воды T_2 на выходе из электрического котла от потока W воды через него (т.е. объема жидкости ΔV , протекающего за время Δt : $W = \Delta V / \Delta t$). Также он измерил температуру холодной воды T_1 , поступающей в



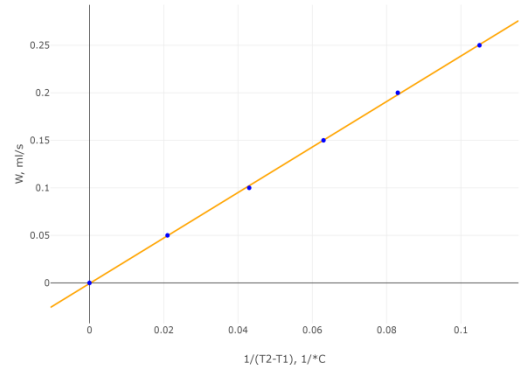
котел. Постройте график зависимости потока от разности температур горячей и холодной воды в таких координатах, чтобы он оказался линейным. Используя построенный график, определите мощность N . Плотность воды $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, удельная теплоемкость воды $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$. Тепловых потерь нет.

Номер опыта	$T_1, ^\circ\text{C}$	$T_2, ^\circ\text{C}$	$W, \text{мл/с}$
1	10	19.5	0.25
2		22.0	0.20
3		26.0	0.15
4		33.5	0.10
5		57.5	0.05

Решение (Бутрим Б.Г.):

За время Δt в котел попадает $\Delta m = \rho \Delta V = \rho W \Delta t$ воды при температуре T_1 . Благодаря полученному от нагревателя теплу $\Delta Q = N \Delta t$ эта порция воды нагревается до температуры T_2 : $\Delta Q = c \Delta m (T_2 - T_1)$. Тогда $W = \frac{N}{c\rho} \cdot \frac{1}{T_2 - T_1}$ и график зависимости $W \left(\frac{1}{T_2 - T_1} \right)$ должен быть прямой пропорциональностью с угловым коэффициентом $\frac{N}{c\rho}$. Полученный угловой коэффициент $\frac{N}{c\rho} \approx 2,39 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{с}}$. Ответ $N \approx 10$ кВт.

Номер опыта	$\frac{1}{T_2 - T_1}, ^\circ\text{C}^{-1}$
1	0,105
2	0,083
3	0,063
4	0,043
5	0,021



Критерии оценивания (10 баллов)

1	$\Delta m = \rho W \Delta t$	1 балл
2	$\Delta Q = N \Delta t$	1 балл
3	$\Delta Q = c \Delta m (T_2 - T_1)$	1 балл
4	$W = \frac{N}{c\rho} \cdot \frac{1}{T_2 - T_1}$	1 балл
5	Выбрана линеаризация $W \left(\frac{1}{T_2 - T_1} \right)$ или $(1/W)(T_2 - T_1)$	1 балл
6	Пересчет $\frac{1}{T_2 - T_1}$ в таблице или аналог.	1 балл
7	Построен линеаризованный график (подписаны оси 0,5 балла, разумная оцифровка осей 0,5 балла, нанесены точки 0,5 балла, проведена прямая 0,5 балла)	2 балла
8	угловой коэффициент $\approx 2,39 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{с}}$	1 балл
9	Ответ $N \approx 10$ кВт	1 балл