ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

к задачам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по физике в 2023/2024 учебном году

9 класс

1. (10 баллов) Две частицы совершают движение вдоль одной прямой, выходя с интервалом T из одной точки с одинаковыми по направлению и величине начальными скоростями. Ускорения частиц также одинаковы по направлению и величине и постоянны. Частицы встречаются, пройдя пути, отличающиеся в два раза. Через какое время после начала движения первой частицы произошла встреча?

Ответ. Через время $\frac{\sqrt{3}+1}{2}T$.

Решение. Возьмем ось x в направлении начальных скоростей частиц и запишем координаты частиц в зависимости от времени (отсчитываемого от момента начала движения первой частицы) в виде

$$x_1 = V_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad x_2 = V_0(t-T) - \frac{a(t-T)^2}{2}$$

(V_0 и a – величины начальных скоростей и ускорений). Здесь учтено, что ускорения частиц направлены против начальных скоростей, иначе частицы не могли бы встретиться. Из условия $x_1 = x_2$ получаем выражение для момента встречи

$$t = \frac{V_0}{a} + \frac{T}{2}.$$

Из данного выражения следует, что встреча произошла через время $T/2$ после момента остановки первой частицы (V_0/a).

Путь, пройденный к моменту встречи первой частицей, складывается из пути до остановки $V_0^2/(2a)$ и пути после остановки $a(T/2)^2/2$, т.е.

$$S_1 = \frac{V_0^2}{2a} + \frac{aT^2}{8}.$$

Путь, пройденный второй частицей, равен ее перемещению:

$$S_2 = x_2 = V_0(t-T) - \frac{a(t-T)^2}{2}.$$

С учетом полученного выше выражения для момента встречи t приходим к формуле

$$S_2 = \frac{V_0^2}{2a} - \frac{aT^2}{8}.$$

Из условия $S_1 = 2S_2$ находим

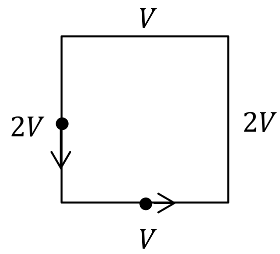
$$\frac{V_0}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}T.$$

Подставляя это выражение в формулу для t, окончательно получаем

$$t = \frac{\sqrt{3}+1}{2}T.$$

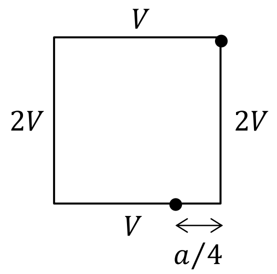
Разбалловка. Понято, что ускорения направлены против начальных скоростей – 1 балл.
Записаны формулы зависимостей координат тел от времени – по 1 баллу за формулу.
Из равенства координат получено уравнение связи параметров – 1 балл.
Записан путь первой частицы – 2 балла.
Записан путь второй частицы – 1 балл.
Из условия $S_1 = 2S_2$ получено еще одно уравнение связи – 1 балл.
Найдено искомое время – 2 балла.

2. (10 баллов) Два жучка одновременно начинают движение по сторонам квадрата с середин двух смежных сторон (см. рис.). Скорость движения каждого жучка равна V на одних сторонах квадрата и $2V$ на других. Через какое время расстояние между жучками достигнет максимального значения? Чему равно это значение? Длина стороны квадрата равна a.



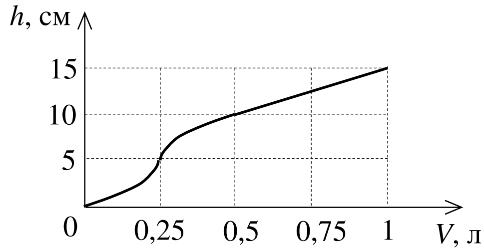
Ответ. Через время a/V. Максимальное расстояние равно $\frac{\sqrt{17}}{4}a$.

Решение. Положение жучков, при котором расстояние между ними максимально, показано на рисунке. Оно равно $\frac{\sqrt{17}}{4}a$ и достигается через время $\frac{a}{V}$.



Разбалловка. Понято положение жучков при максимуме расстояния – 6 баллов.
Найдено искомое время – 3 балла.
Найдено максимальное расстояние – 1 балл.

3. (10 баллов) На дно пустого цилиндрического сосуда положили сплошной металлический цилиндр и стали наливать воду. График зависимости высоты h уровня воды в сосуде от объема V налитой воды приведен на рисунке. Найти радиус и длину металлического цилиндра.



Ответ. Радиус цилиндра равен 5 см, его длина равна $50/\pi \approx 16$ см.

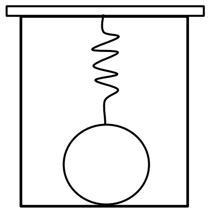
Решение. В точке $V = 0{,}25$ л, $h = 5$ см график имеет максимальную крутизну, что соответствует заполнению сосуда водой до уровня центра цилиндра. Действительно, в этом случае горизонтальное сечение цилиндра занимает максимально возможную часть сечения сосуда, и при доливании одного и того же объема воды ΔV приращение высоты Δh получается больше, чем при других уровнях заполнения. Таким образом, радиус R цилиндра равен 5 см.

В интервале $0{,}25 < V < 0{,}5$ график идет симметрично участку $0 < V < 0{,}25$, что соответствует симметричной форме цилиндра. Точка $V = 0{,}5$ см соответствует заполнению сосуда водой до уровня диаметра цилиндра 10 см. Отсюда также можно найти радиус цилиндра R.

По прямолинейному участку графика ($0{,}5 < V < 1$) находим площадь сечения сосуда $S = 500$ см^3 : 5 см = 100 см^2. Объем части сосуда высотой 10 см можно, с одной стороны, записать как произведение S на 10 см, а с другой, как сумму объема цилиндра $2\pi R \cdot L$ (L – длина цилиндра) и объема воды 0,5 л, соответствующего заполнению цилиндра до уровня 10 см (см. график), т.е. 100 см^2 · 10 см = $2\pi R \cdot L$ + 500 см^3. Отсюда находим, что $L = 50/\pi \approx 16$ см.

Разбалловка. Понято, что радиус цилиндра равен 5 см – 2 балла.
Найдено сечение сосуда – 2 балла.
Составлено уравнение для нахождения длины цилиндра – 4 балла.
Найдена длина цилиндра – 2 балла.

4. (10 баллов) Шар объемом 1000 см^3 лежит на дне цилиндрического сосуда и скреплен пружиной с перемычкой в верхней части сосуда (см. рис.). Площадь дна сосуда равна 250 см^2. После того, как в сосуд налили некоторое количество воды, шар оказался погруженным наполовину и перестал давить на дно. После доливания еще такого же количества воды и еще 1 литра шар оказался полностью погруженным, а пружина недеформированной. Найти жесткость пружины. Плотность воды равна 1000 кг/м^3, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.



Ответ. Жесткость пружины равна 125 Н/м.

Решение. Из конечного состояния системы (шар плавает полностью погруженным, пружина на него не действует) ясно, что плотность шара равна плотности воды. Можно понять также, что после второго наливания воды шар поднялся на высоту 1 л : 250 см^2 = 4 см. Действительно, в конечном состоянии уровень воды в сосуде равен сумме толщины слоя воды, в котором полностью находится шар, т.е. диаметра шара, и толщины слоя воды под шаром объемом 1 л. Тогда можно написать следующее условие баланса действующих на шар сил (тяжести, Архимеда и упругой) после первого наливания воды:

$$\rho_{\text{в}} V g = \rho_{\text{в}} \frac{V}{2} g + k\Delta L,$$

где $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды (шара), V – объем шара, g – ускорение свободного падения, k – жесткость пружины и ΔL – начальное растяжение пружины, равное 4 см. Отсюда получаем, что

$$k = \frac{\rho_{\text{в}} V g}{2\Delta L} = 125 \text{ Н/м}.$$

Разбалловка. Понято, что плотность шара равна плотности воды – 2 балла.
Понято, что шар поднялся на 4 см – 3 балла.
Составлено уравнение баланса сил после первого наливания воды – 3 балла.
Найдена жесткость пружины – 2 балла.

5. (10 баллов) 2023 резистора, из которых 1011 имеют сопротивление R и 1012 сопротивление $2R$, соединили последовательно в многоугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков многоугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $1517R$ и $1518R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков многоугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 1011 \cdot R + 1012 \cdot 2R = 3035 \cdot R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число резисторов с сопротивлением R нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениях ветвей, т.е. при $R_1 = 506 \cdot 2R + 505 \cdot R = 1517R$ и $R_2 = 506 \cdot 2R + 506 \cdot R = 1518R$.

Разбалловка. Записана формула для мощности в общем виде – 1 балл.
Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 5 баллов.
Найдено сопротивление одного участка – 2 балла.
Найдено сопротивление другого участка – 2 балла.